Clasificación birracional de Superficies algebraicas

22 de enero

Una herramienta importante para reconocer superficies es intentar contestar

¿Qué curvas contienen?

Ingenuamente: $C = S \cap V(f) \subseteq \mathbb{R}^n$

entonces $C \subseteq S$ está dada por un ideal principal en $k[S]$.

Ideales principales en $k[S]$ definen curvas en S, pero no todas; pues $k[S]$ no necesariamente es un dominio de ideales principales

Si $d \in \mathbb{Z}$ + $d \geq 1$ <u>Analogía</u> (1

$$\mathcal{O}_d \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$$

anillo de enteros algebraicos

Dominio de Dedekind

¿Para qué valores de d es $\mathcal{O}_d$ dominio de ideales principales?

Eg: $I = \langle 2, 1+\sqrt{-5} \rangle \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ideal

¿Es I principal?

Pista: NO es libre (aunque sí es localmente libre)

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_d) = \frac{\text{Ideales fraccionarios de } \mathcal{O}_d}{\text{Ideales fraccionarios principales}}$$

Teorema: $|\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_d)| < \infty$ # de clase (Minkowski)

Nota: Ideales fraccionarios de $\mathcal{O}_d$ = $\mathcal{O}$-módulos finitamente generados $\neq 0$. $\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$

Dominio de Dedekind

ideales frac satisfacen

En general (ideales frac. satisfacen) / $I \cdot J = \mathcal{O}$ para algún J.

Proposición: I ideal fraccional de $\mathcal{O}$ es invertible ssi $\forall\ \mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}$ ideal primo $\neq 0$

$$I_{\mathfrak{p}} = I \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$$

es un ideal fraccional principal de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$

Demostración: I invertible &

$$I \cdot J = \mathcal{O} = 1 \cdot \mathcal{O}$$

$\Rightarrow \quad 1 = \sum a_i b_i \qquad a_i \in I$

$\qquad\qquad\qquad\qquad b_i \in J$

$\Rightarrow$ no todos los $a_i b_i \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ pueden vivir en el ideal maximal $\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

$\underbrace{\mathfrak{p} \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}_{\text{no unidades de } \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}$

$\Rightarrow$ si $a_1 b_1$ es unidad en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$

entonces $I_{\mathfrak{p}} = a_1 \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ pues

si $x \in I_{\mathfrak{p}}$, $x \cdot b_1 \in I_{\mathfrak{p}} J_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$

$$x b_1 (a_1 b_1)^{-1} \cdot a_1 = x \in a_1 \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$$

Recíprocamente $I_{\mathfrak{p}} = I \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ es principal

$$\Rightarrow I_{\mathfrak{p}}^{-1} = \{ x \in K \mid x I \subseteq \mathcal{O} \}_{\mathfrak{p}}$$

<u>Def:</u> $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}) = \dfrac{\text{Ideales invertibles de } \mathcal{O}}{\text{Ideales fracc. principales}}$

$= \text{grupo de Picard de } \mathcal{O}.$

<u>NOTA:</u> $1 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow K^* \longrightarrow J_K \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{O}) \longrightarrow 0$

sucesión exacta

grupo de ideales fraccionarios.

$\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$ mide la discrepancia entre pensar en números y pensar en ideales.

Por ejemplo si $|\mathrm{Pic}| = 1$ la factorización en primos de ideales y de #'s es la misma!!

$$|\mathrm{Pic}(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])| = 2$$

$(2, 1+\sqrt{-5}) = M$ no es principal

pero es localmente principal

$$\mathrm{Pic}(S) = \frac{\mathcal{O}\text{-módulos fin gen} \subseteq K^*}{\text{Ideales frac. principales}}$$

$$= \frac{\mathcal{O}\text{-módulos fin gen Invert.}}{\text{Ideales frac. principales}}$$

localmente de libre rango 1

$=$ Gavillas invertibles / iso

NO ~~Ejemplo~~ estridencia:

$$k[x,y,z] \big/ \langle xy - z^2 \rangle = A \supseteq L \quad \text{ideal no princip}$$

$L = \langle y, z \rangle$ no es principal en la localización $A_{(0,0,0)}$ $\quad m = \langle x, y, z \rangle$

En efecto, $L \subseteq \langle x, y, z \rangle = m$

$$m^2 = \langle x^2, xy, xz, \dots z^2 \rangle$$

$k = \mathbb{C}$

$$m/m^2 = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rangle \simeq \mathbb{C}^3$$

y

$L_m = \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$ no puede ser principal