Clasificación de Superficies:

Ayer: si S $p_g = 0$ $q \geq 1$ $\Longrightarrow$

(1) $K_S^2 < 0$ (2) $\underbrace{\begin{pmatrix} K_S^2 = 0 \\ q = 1 \end{pmatrix}}$

$\Rightarrow S$ reglada. ¿Qué superficies hay aquí?

Sabemos $S \xrightarrow[p]{} B$ con $g(B) = 1$

morfismo de Albanese.

$\Rightarrow$ (!)

si $g(F_{gen}) \geq 2 \Rightarrow P$ es suave.

si $g(F_{gen}) = 1 \Rightarrow F_{sing} = mE$

curva elíptica suave.

si $g(F_{gen}) = 0$

$\Rightarrow S = \mathbb{P}(E) \to B$ reglada

Teorema: S minimal no reglada con $p_g = 0$ & $q \geq 1$. Entonces $S \cong B \times F / G$ donde B & F tienen género ≥ 1 G es un grupo finito actuando fielmente en B & F tal que B/G es elíptica & F/G es racional y uno de los siguientes casos se satisface:

(I) B elíptica & G actua por traslaciones

(II) F es elíptica & G actua libremente en $B \times F$.

Reciprocamente, cualquier superficie con estas propiedades satisface minimalidad, $q=1$ $k^2=0$ & $P_g=0$ no-reglada.

Demostración: S minimal con $p_g = 0$ & $q \geq 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} K^2 = 0 \\ \& \\ q = 1 \end{pmatrix}$

Argumento: Como $2q = b_1$ la fórmula Noether de

$$K^2 = 10 - 8q - b_2$$

Como $H \in |\mathcal{O}_S(1)|$ & $f \in |\underbrace{\pi^{-1}}_{\text{morfismo de Albanese}}(x)|$

son linealmente independientes

$\Rightarrow K^2 \leq 0$. Como $K^2 < 0$ implica S reglada, tenemos $K^2 = 0$

$q = 1$.

Aquí hay superficies no regladas

$q=1$, $P_g = 0 = K^2$

LEMA Sabemos entonces que

$\overline{\text{VI } 9, \text{VI } 10}$
LM

$S \cong B \times F/G$ donde

G actua en B e F tal que B/G es elíptica.

Más aún, B es elíptica Caso (I) ó F es elíptica caso (II).

En ambos casos G actua libremente en $B \times F$, por tanto

$\pi : B \times F \longrightarrow S$ es étale.

= Recíprocamente =

Queremos ahora saber cuando $B \times F/G$ tiene $P_g = 0$
$q = 1$.

Observemos $B \times F / G$ es minimal y no reglada.

Escribamos $\tilde{S} = B \times F$.

$$H^0(\tilde{S}, \Omega^1_{\tilde{S}}) = H^0(B, \omega) \oplus H^0(F, \omega)$$

$$\overset{!}{\Rightarrow} \quad q(\tilde{S}) = g(B) + g(F).$$

$$H^0(\tilde{S}, \Omega^2) \overset{\sim}{=} H^0(B, \omega_B) \otimes H^0(F, \omega_F)$$

$$\Rightarrow \quad P_g(\tilde{S}) = g(B)\, g(F).$$

$\boxed{\text{LEMA:}}$ $S' \xrightarrow[\pi]{} S$ étale entre superf.

$\deg(\pi) = n$. Entonces

1) $K_{S'}^2 = n K^2$

2) $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = n\,\chi(\mathcal{O}_S)$

Por tanto, como $K_{\tilde{S}}^2 = 0$

$\Rightarrow K_S^2 = 0$. Ahora

$$H^0(S, \Omega^1) \cong H^0(\tilde{S}, \Omega^1)^G$$

$$\cong H^0(B, \omega)^G \oplus H^0(F, \omega)^G$$

$$\cong H^0(B/G, \omega) \oplus H^0(F/G, \omega)$$

B/G elíptica, $\boxed{q(S) = 1 \iff F/G \cong \mathbb{P}^1}$.

Como $x(\theta_s) = 1 - q + p_g$

y $q = 1 \Rightarrow \boxed{p_g = 0 \Leftrightarrow x(\theta_s) = 0}$

■