Clasificación de superficies algebraicas 24 enero

Ayer: si $I \subseteq \mathcal{O}$ = dominio de Dedekind
ideal

entonces,

$I_p \cong \mathcal{O}_p$ para

todo ideal primo $(\neq 0)$ $p \subseteq \mathcal{O}$.

Eg: $I = (2, 1+\sqrt{-5}) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = R$

Observar $2 \in I^2$; si $I = (a)$ $a \in R$

entonces $2 = u a^2$ con $u \in R^*$

$\Rightarrow$ $N(2) = 4 = N(u) N(a)^2$.

Por lo tanto I no es principal.

I_p es principal: si $I \not\subseteq p$

con $p \subseteq R$ ideal primo $\Rightarrow$ $I_p = R_p$

pues tiene unidades

Si $I \subseteq \mathfrak{p}$ entonces $2 \in I \cdot \mathfrak{p}$

$\Rightarrow$ Por el Lema de Nakayama

$$I_{\mathfrak{p}} = (1+\sqrt{-5})_{\mathfrak{p}} \quad \blacksquare$$

Hoy: **Equivalencia de divisores de WDivisores y CDivisores. Ejemplo Alfredo.**

Recordar: $I \subseteq R$ ~~ideal~~ R-módulo

I es invertible ~~ssi~~ * finitamente generado

para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq R$ $\longrightarrow$ * $\underbrace{I_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}}_{\text{localmente libre de rango } 1}$

morfismo $R_{\mathfrak{p}}$-módulos

Nota: Es suficiente verificar $I_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}$ para ideales maximales.

$R^* \hookrightarrow K(R) \to C(R) \longrightarrow Pic(R) \to 0$

sucesión exacta.

——— // ———

WDivisor ~~del~~ anillo **R** es una suma formal de ideales primos de codimensión 1.

CDivisor el anillo R es un ideal invertible (R-mod localmente libre de rango 1 + fin. generado)

NOMBRE $\cong$

sub R-módulo de k(R) invertible $(I \cdot I' = R)$

Recordar2: $I \subseteq R$ R-módulo fin. generado localmente libre $\boxed{\text{Gavilla invertible}}$

¿ Em este contexto, también hay ideales fraccionarios?

↳ R-submódulos del campo $\underbrace{k(R)}_{\text{Campo de fracciones}}$

<u>Proposición</u>: Todo ~~ideal~~ R-módulo invertible es isomorfo a un ideal fraccionario.

Si $I \subseteq k(R)$ es un R-submódulo, entonces, I es invertible ssi

$$I \cdot I^{-1} = R \qquad I^{-1} := \{a \in k(R) \mid aI \subseteq R\}$$

<u>Proof</u>: [E] pág 259

$$\left\{ \text{R-módulos invertibles} \right\} \Big/ \text{isomorfismo}$$

$$\left\{ \text{R-submódulos de } K(R) \right\} \Big/ \text{principales}$$

Definición: X variedad proyectiva suave.

$$\mathrm{Pic}(X) = \left\{ \begin{matrix} \text{Gavillas} \\ \text{invertibles} \end{matrix} \right\} \Big/ \text{isomorfismo}$$

Observar: (Hartshorne pág ~~141~~ 144)

1) WDivisores & CDivisores son lo mismo en esquemas suaves.

X es factoria localmen

Dar la estructura de CDivisor

2) $\underbrace{D_1 \sim D_2}_{D_1 - D_2 = \text{Principal}}$ ssi $\mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$

isomorfismo de gavillas

Argumento: suficiente mostrar que si D es principal $\iff \mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}$.

$$\mathcal{O} \longleftarrow \mathcal{L}(D) \quad \text{y viceversa}$$
$$1 \longleftarrow\!\shortmid f^{-1}$$

Ejemplo: Alfredo (continuación)

$I = \langle x^3 + y^3 + z^3 + w^3 \rangle \subseteq k[x, y, z, w]$

$L = \langle x + y, z + w \rangle$ línea en S

$x = \langle x + y, z + w, y \rangle$ punto en S

$L_x \subseteq \mathcal{O}_x \longleftarrow$ UFD + normal

$\Rightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_x) = 0$

$\Rightarrow$ ideales son principales.

$\Rightarrow L_x$ es principal.

$\boxed{\text{Macaulay 2 Local Ring}}$

pendiente

Por lo tanto, globalmente el ideal que define una línea en la superficie cúbica S no es principal, pero localizaciones adecuadas, dan la estructura de CDivisor.