Clasificación birracional de superficies 29 enero

clase pasada: Divisores en superficies

y $\mathrm{Pic}(S)$: grupo de Picard.

Hoy: Secciones globales de gavillas invertibles. ¿Qué curvas contiene una superfi S?

<u>Definición</u>: Un divisor de Cartier en S (CDivisor) $D = \{(U_i, f_i)\}$

es efectivo, denotado $D \geq 0$, si

$f_i \in \mathcal{O}_S(U_i)$ no es un divisor de cero $\forall i$.

Proposición: Los siguientes tres conjuntos son bijectivos.

$A = \Big\{$ CDivisores efectivos $\Big\}$

ideales

$C = \Big\{$ subesquemas $Y \subseteq X$, definidos localmente por una ecuación. $\Big\}$

$B = \Big\{$ Gavillas invertibles L sobre S junto con una sección $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(L))$ la cual localmente no es divisor de zero. $\Big\}$

Demostración: $A \Rightarrow B$. Sabemos por construcción $\mathcal{O}_S \subseteq \mathcal{O}_S(L)$

pero $\mathcal{O}_S$ tiene una sección global $1 \in H^0(S, \mathcal{O}_S)$ y ésta define una sección

$$s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(L)).$$

$B \Longrightarrow C.$ $(L, s) = ($Gavilla invertible, sección global $s)$

$L_{|U} \cong \mathcal{O}_U$ $\left(I_p \cong R_p \text{ como } R\text{-módulos} \right)$

y $s \longmapsto f_i \in \underbrace{H^0(U, \mathcal{O}(U))}_{R_p}$

$\uparrow$ no es divisor de cero.

Y es el subesquema definido localmente por f_i.

$C \Rightarrow A$. Dado $Y \subseteq X$ y f_i una ecuación local de Y, entonces $D = \{U_i, f_i\}$. ∎

Eg: $I \subseteq \mathcal{O}_S$ gavilla de ideales de $Y \Rightarrow I = \mathcal{O}_S(-D)$.

Observación: 1) un CDivisor $D = \{(U_i, f_i)\}$ le podemos asociar

$$\mathcal{O}_S(D) \subseteq k(S)$$

generada por f_i^{-1} en cada U_i.

2) CDivisores efectivos son ideales duales I localmente principales

Eg: $I = \langle x+y, z+w \rangle \subseteq k[x,y,z,w] / I_3$

el objeto geométrico
es una línea $L \subseteq S$
y $\mathcal{O}_S(L)$ es la gavilla
invertible asociada t.q.

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(L)) \geq 1$$

Moraleja: Esto da una correspondencia 1-1
entre CDivisores efectivos de S
y subvariedades $C \subseteq S$ localmente
principales i.e. Curvas ~~que~~
cuyo ideal ~~están~~ generado localmente
por una sola ecuación.

Definición: D es un divisor, entonces, $|D|$ es el conjunto de divisores D' que son linealmente equivalentes a D.

Por lo tanto $|D|$ está en correspondencia 1-1 con secciones $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) / \text{unidades } \mathcal{O}_S^*$

i.e. $\boxed{\dim |D| = \dim H^0(S, \mathcal{O}_S(D)) - 1}$

Pregunta: ¿Es posible "perturbar" las ecuaciones de $L \subseteq S$? i.e. ¿es posible "mover" $L \subseteq S$ perturbando los coeficientes de L?

Eg: $S = \langle x^4 + y^4 + xz^3 + yw^3 \rangle \subseteq \mathbb{P}^3$

$L = \langle x, y \rangle \subseteq S$ línea

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(L)) = \text{¿?}$$

$C = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle \subseteq \mathbb{P}^2 = S$

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \stackrel{¿?}{=}$$

```
i1 : S=QQ[x,y,z,w]/ideal(x^4+y^4+x*z^3+y*w^3)

o1 = S

o1 : QuotientRing

i2 : L=ideal(x,y);

o2 : Ideal of S

i3 : sLdual = dual sheaf module L

o3 = image {-1} | x -y3-w3 |
           {-1} | y x3+z3  |


                                                    2
o3 : coherent sheaf on Proj(S), subsheaf of OO       (1)
                                              Proj(S)

i4 : HH^0(sLdual)

        1
o4 = QQ

o4 : QQ-module, free

i5 :
```