Clasificación de superficies 14 feb

Clase pasada: Ejemplos de $Pic(S)$

Hoy: más ejemplos & divisor canónico.

$$S = \{x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \{x+y, z+w\} \\ L_2 = \{x+z, y+w\} \\ L_3 = \{x+w, z+y\} \end{array}\right\} \text{líneas contenidas en } S.$$

$$E = L_1 \cup L_2 \cup L_3$$

entonces

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow Pic(S) \longrightarrow Pic(S \setminus E) \to 0$$

$\Rightarrow$ si $L_1\ L_2\ L_3$ son l.i.

y no son torsión

$$\Rightarrow \quad \mathbb{Z}^3 \leq \mathrm{Pic}(S).$$

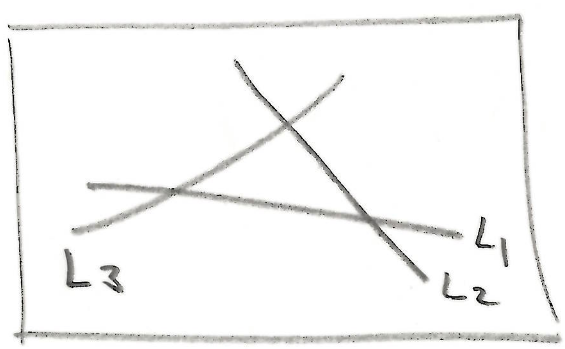
$\boxed{\text{asumiendo } \mathrm{Pic}(S \setminus E) = 0}$

<u>OBSERVAR</u>:

$$L_1 \cap L_2 \neq [\emptyset]$$
$$L_2 \cap L_3 = [1:1:-1:-1]$$
$$L_1 \cap L_3 \neq \emptyset$$

pues estas tres líneas viven en el plano $H = \{x+y+z+\omega=0\}$

$$H \cap S = L_1 \cup L_2 \cup L_3$$



$H \cap S$

Tarea: $\langle x+\gamma^j y, z+\gamma^i w\rangle$ $0\leq j,i\leq 2$

$L_1; L_2, L_3$ $\langle x+\gamma^j z, y+\gamma^i w\rangle$ & $\gamma^3=1$

$\langle x+\gamma^j w, y+\gamma^i z\rangle$

Son todas las líneas en S.

Tarea* ¿Cuál es el rango de $\mathrm{Pic}(S)$ sobre $\mathbb{Q}$?

Sea $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\gamma)\setminus\mathbb{Q}) = G$

con $\gamma^3=1$.

¿Cómo actua G en las líneas de $S\subseteq\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}(\gamma)}$?

<u>Afirmación</u>: $L_1 = \langle x+y, z+w \rangle$

$$L_5 = \langle x+\gamma y, z+\gamma w \rangle$$

$L_1 \cap L_5 = \emptyset$. $\left(\begin{matrix} \text{notación} \\ \ell, L \end{matrix} \right)$

<u>Observar</u>: existe un morfismo racional

línea que une a p y q.

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 =) \quad \ell \times L & \dashrightarrow & S \\ (p, q) & \longmapsto & \overline{pq} \cap S = x \end{array}$$

¡Si $\overline{pq} \subseteq S$, este morfismo no está bien definido!

<u>Tarea</u> ¿Cuántas de estas líneas hay en S?

Cálculo:
$$H_{[\alpha:\beta]} = \{\alpha(x+y) + \beta(z+w) = 0\}$$

Pincél de planos que contienen a la línea L_1 ($=\ell$).

$$H_{[\alpha:\beta]} \cap S = L_1 \text{ (familia de cónicas) } C_{[\alpha:\beta]}$$

$=1$
$$= (x+y)\left[(1-t^3)x^2 - (2t^3+1)xy + (1-t^3)y^2 - 3t^2 xz - 3t^2 yz - 3tz^2\right]$$

Buscamos los valores de t para los cuales $C_{[t:1]}$ es singular.

observar $t=1$, $C_{[1:1]} = L_2 \cup L_3$
$$= (x+z)(y+z).$$

$$\operatorname{disc}\left(C_{[t:1]}\right) = \left| \begin{pmatrix} -2(t^3-1) & -2t^3-1 & -3t^2 \\ -2t^3-1 & -2(t^3-1) & -3t^2 \\ -3t^2 & -3t^2 & -6t \end{pmatrix} \right|$$

$$= 18t^4 - 18t = \underline{\underline{18t(t^3-1)}}$$

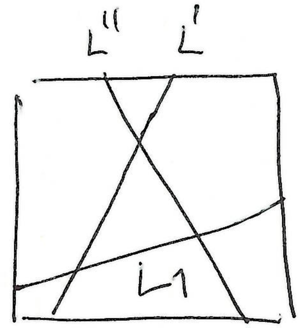
¡Necesitamos que el campo contenga raíces de la unidad!!

El caso $\beta = 0$ $\alpha = 1$

$$L_1 \; C_{[1:0]} = H_{[1:0]} \cap S$$

$$= \{x+y=0\} \cap S$$

$$= L_1 \cup L' \cup L''$$



$\Rightarrow \exists$ 5 pares de líneas

$$\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad (\cong L \times \ell)$$

$$p \longmapsto (\underbrace{\overline{pL} \cap \ell}_{q \in \ell}, \underbrace{\overline{p\ell} \cap L}_{q' \in L})$$

si $\quad p \in$ línea $\in S \implies$

$$\mathbb{L} \cap \ell \neq \emptyset$$

$$\varphi(p) = (\overline{pL} \cap \ell, \underbrace{\overline{p\ell} \cap L}_{\text{fijo}})$$

$$\implies \varphi(z) = (\underbrace{\overline{zL} \cap \ell}_{\text{fijo}}, \underbrace{\overline{z\ell} \cap L}_{\text{fijo}})$$

si $\quad z \in \mathbb{L}$ satisface

$$\mathbb{L} \cap \ell \neq \emptyset \qquad \mathbb{L} \cap L \neq 0$$

<u>Afirmación</u>: $\exists$ 5 líneas en S

tal que: $\psi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$$\psi(\mathbb{L}) = (x_0, y_0) = \text{punto fijo en } S$$

$\ast$ si $z \in L$ (ó $z \in \ell$)

entonces tomamos

$$\psi(z) = (T_z S \cap \ell, z)$$

$\Rightarrow \psi$ contrae 5 líneas en S

$$\Rightarrow \boxed{S \cong Bl_{z_0, \dots z_4} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$$

<u>COROLARIO</u>: $Pic(S) \cong \mathbb{Z}^7$ $\longleftarrow$