# Clasificación de superficies 21 Feb

Clase pasada:

$$0 \to \tilde{M} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O} \to 0$$

$\mathcal{O}$-módulo al nivel de $R$-módulos

$$0 \to M \to R(-1)^{n+1} \to R$$

Hoy:

$\tilde{M} = \Omega_{\mathbb{P}^n/k} =$ ~~módulo~~ gavilla de 1-formas

= localmente libre de rango $n$.

Addendum: Ejemplo: $R = k[x,y]/xy$

Recorda $\langle dx, dy \rangle$ generan $\Omega_{R/k}$

con una relación

$$x\,dy + y\,dx = 0.$$

observar la 1-forma

$$\omega = x\,dy = -y\,dx$$

entonces $x\omega = y\omega = 0$

por lo tanto el submódulo generado por $\langle \omega \rangle = N = k\omega$ y por otro lado

$$\Omega/N \cong \underbrace{R\,dx}_{\Omega_L} \oplus R\,dy \implies$$

$$0 \to N \to \Omega_R \to \Omega_L \oplus \Omega_{L'} \to 0$$

$\uparrow$

1-formas en $L \cup L'$

es la extensión de $\Omega_L$ & $\Omega_{L'}$ por un módulo que es torsión $\blacksquare$

Retomando: $\tilde{M} \cong \Omega_{\mathbb{P}^n/k}$

Demostración: $R = k[x_0, \ldots, x_n]$

anillo coordenado Homogéneo de $\mathbb{P}^n_k$

$R(-1)^{n+1}$ $\quad \{e_0, \ldots, e_n\}$ base de grado 1

entonces

$$\varphi : R(-1)^{n+1} \longrightarrow R \qquad M = \ker \varphi$$
$$e_i \longmapsto x_i$$

$$0 \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$ sucesión exacta de gavillas.

Para mostrar $\tilde{M} = \Omega_{\mathbb{P}^n/k}$ tenemos que analizar las localizaciones.

$\tilde{M}$ localmente: observar $R(-1)^{n+1}_x \twoheadrightarrow R_x$ homomorfismo de $R_x$-módulos

$\Rightarrow \quad M_{x_j} =$ libre de rango $n$ $= \langle e_j - \left(\frac{x_j}{x_i}\right) e_i \mid i \neq j \rangle$

$\Rightarrow \quad \tilde{M}|_{U_j} = R_{x_j}$-módulo libre $= \overbrace{\left\langle \underbrace{\left[e_j - \left(\frac{x_j}{x_i}\right) e_i\right]}_{\text{grado } 1} \frac{1}{x_i} \right\rangle}^{\text{grado cero}}$

$\operatorname{Spec}\left(k\underbrace{\left[\frac{x_0}{x_j}, \dots \frac{x_n}{x_j}\right]}_{R_x}\right)$

generado por las secciones

$= M_{(x_j)} =$ grupo de elementos de grado 0 en $M_{x_j}$

$\Omega_{\mathbb{P}^n/k}$ localmente

$\Omega|_{U_j} = \left\langle d\left(\frac{x_0}{x_j}\right), \dots, d\left(\frac{x_n}{x_j}\right) \right\rangle$

$R_j$-módulo libre

Por lo tanto definimos

$$\varphi_j : \Omega_{\mathbb{P}^n/k}\big|_{U_j} \longrightarrow \tilde{M}\big|_{U_j}$$

$$d\left(\frac{x_j}{x_i}\right) \longmapsto \frac{1}{x_i^2}\left(x_i e_j - x_j e_i\right)$$

$$= \left(\frac{e_j}{x_i} - \frac{x_j e_i}{x_i^2}\right)$$

Estos morfismos $\varphi_j$'s pegan en los abiertos $U_j$'s a un morfismo de gavillas

$$\Omega_{\mathbb{P}^n/k} \cong \tilde{M}$$

∎

Moraleja:

$$\boxed{0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n/k} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0}$$