Clasificación de superficies algebraicas: 19 agosto

Repaso del curso anterior:

Teorema: X variedad algebraica suave si X es racional, entonces no tiene 1-formas de Kähler globales. Es más,

$$H^0(X, \Omega_{X/k}^{\otimes m}) = 0 \quad \forall\, m \geq 1.$$

$\mathrm{Char}(k) = 0$.

Argument: $U \overset{\phi}{\hookrightarrow} X$ abierto con complemento de codim > 1.

$$\Rightarrow \quad \phi^* \Omega_{X/k}^{\otimes m} \hookrightarrow \Omega_{U/k}^{\otimes m}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(\Omega_{U/k}^{\otimes m}) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n/k}^{\otimes m})$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(\Omega_{X/k}^{\otimes m}) \hookrightarrow \underbrace{\Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n/k}^{\otimes m})}_{\text{se anula}}. \quad \boxtimes$$

Observación:

$$\overset{\otimes}{\Omega}{}^{n}_{\mathbb{P}/k}$$ tiene rango alto.

$\Rightarrow$ mejor trabajaremos con

$$\boxed{\omega_X := \bigwedge^n \Omega_{X/k}.}$$ haz de líneas canónico.

Definición: m-ésimo plurigénero de X se define como

$$P_m(X) = h^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)).$$

CORO: X variedad algebraica suave & racional

$$\Rightarrow \quad P_m(X) = 0 \quad \forall\ m \geq 1.$$

Racionalidad depende del campo.

Eg: (B. Segree)
1942

S superficie cúbica suave en $\mathbb{P}^3_k$.
Si toda curva $C \subseteq S$ es linealmente equivalente a $\mathcal{O}_S(mH)$, entonces
hiperplano
S no es racional sobre k.

↳ (ninguna cúbica de rango de Picard 1 es racional).

Criterio para detectar si una cúbica tiene rango de Picard 1.

Teorema (B. Segree 1952). $S_k \subseteq \mathbb{P}^3_k$ cúbica y considerar $Gal(\bar{k} \backslash k)$ actuando en las 27 líneas de $S_{\bar{k}} \subseteq \mathbb{P}^3_{\bar{k}}$.

entonces, las siguiente equivalencias:

1) El rango de Picard de S_k es 1.

2) la suma de las líneas en ~~una~~ cada órbita de $Gal(\bar{k} \backslash k)$ es equivalente a $\mathcal{O}_{S_k}(mH)$.

3) Ninguna órbita de $Gal(\bar{k} \backslash k)$ consiste de líneas disjuntas en S.

Eg: $\{a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 = 0\} = S_{\mathbb{Q}}$.

$$\rho_{\mathbb{Q}}(S) = 1 \quad \text{ssi} \quad \frac{a_{\sigma(0)} a_{\sigma(1)}}{a_{\sigma(2)} a_{\sigma(3)}}$$

B. SEGRE no es cubo.