Álgebra Moderna II : ~~17~~ ABRIL

LUNES, 18 ABRIL

Repaso:

Primos en $\mathbb{Z}[i]$:

$p \equiv 1 \pmod 4$ ⇝ 2 primos π y π'

$p \equiv 3 \pmod 4$ ⇝ 1 primo

$\pi \cdot \pi' = p$ $\quad \pi = a + bi$ &

$a^2 + b^2 = p$

(FERMAT)

¿Existe una fórmula para "a" y "b"?

Próximas clases:

Estudiaremos anillos analogos a $\mathbb{Z}[i]$ y sus elementos primos.

↳ Eg: $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

1) $\delta(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$

Norma euclidiana.

Eg: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ¡No tiene factorización única! $6 = 3 \cdot 2 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$

elementos primos en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Eg: $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ No es euclidiano pues

$4 = 2 \cdot 2 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$

2 es irred pero no es primo

$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d}\} \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2-d)$ d con no cuadrado

→ No es, del todo, anillos análogos a $\mathbb{Z}[i]$. ←

↳ Eg: $f(x) = x^2 + x + 1$

raíces: $\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$$R = \mathbb{Z}[x]\big/(f(x)) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 2\alpha+1=\pm\sqrt{-3}}}{\supseteq} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-3}$$

Ambos anillos (R y $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\sqrt{-3}$) son dominios enteros con el mismo campo de fracciones: $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$.

¡Sin embargo R es euclidiano!

=EJER=

=FIGURA=

——— // ———

$\underbrace{\text{Enteros algebraicos}}$: $\alpha \in \mathbb{C}$

α es raíz de un polinomio mónico $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

Eg: * $n \in \mathbb{Z}$ es un entero algebraico: $f(x) = x - n$

* $\sqrt{d}$ con $d \in \mathbb{Z}$. pues $f(x) = x^2 - d$

* $\alpha = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; $f(x) = x^2 + x + 1$