Álgebra Moderna II: 16 mayo

Clase pasada: Ideales primos y

¿Todos los ideales primos son principales? ¡NO!

Hoy: Dominios de Dedekind.

Multiplicación de ideales

$I, J \subseteq R$ ideales.

entonces

$$I \cdot J = \left\{ \sum_{i}^{n} a_i b_i \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in I \\ b_i \in J \end{array} \right\}$$

Esto es un ideal

<u>EJER</u>

Eg: si $I=(a)$ & $J=(b)$

$\Rightarrow I\cdot J=(ab)$.

<u>Definición:</u> R dominio (no que es campo)

R es un dominio de Dedekind si para todo $I\subseteq R$ ideal, $(\neq 0)$ existe $J\subseteq R$ ideal tal que

$I\cdot J=(r)$ es principal.

Eg: $R_D\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ anillo de enteros es un dominio de Dedekind.

Artin 10.8.10

esbozo de la prueba : si $I \leq R_D$ ideal

entonces $I' = \{ \alpha' = a - b\sqrt{d} \mid \underset{\overset{\shortparallel}{a+b\sqrt{d}}}{\alpha} \in I \}$

$\Rightarrow$ $I \cdot I' = (n)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

---

si tiene sentido multiplicar :

$$I = P_1 \cdots P_k$$

$\Rightarrow$ ¡ Tiene sentido factorizar ideales !

Más aún : EJEMPLO REVELADOR.

en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]=R$ (NO es DFU)

$$6 = 2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

Irreducibles

en R irreducibles y primos son elementos distintos.

¿Cuál es la factorización de (6) en ideales primos?

OBSERVACIÓN:

$$(2, 1+\sqrt{-5})(2, 1-\sqrt{-5}) = (2)$$

Además $(2, 1+\sqrt{-5})$ no es principal pues 2 no sería irreducible.

en $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

$$9 = 3 \cdot 3 = (2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})$$

Irreducibles EJER

<u>OBSERVACIÓN</u>: $(3, 1+\sqrt{-5})(3, 1-\sqrt{-5}) = (3)$

$$\Rightarrow \quad 6 = 3 \cdot 2 = \overset{A}{\overset{\shortparallel}{(2, 1+\sqrt{-5})}}\,\overset{A'}{(2, 1-\sqrt{-5})}\,\overset{B}{\overset{\shortparallel}{(3, 1+\sqrt{-5})}}\,\overset{B'}{(3, 1-\sqrt{-5})}$$

Ideales primos

$$= (AA')(BB')$$

$$= (AB)(A'B')$$

¡ REVELACIÓN !

LA FACTORIZACIÓN de (6) es <u>ÚNICA</u>

Resp: No todos los ideales primos son principales.

Proposición: $P \leq R$ ideal primo

sii R/P es dominio.

Demostración: $\Rightarrow$) Supongamos $a \cdot b = 0$ en R/P

$\Rightarrow \tilde{a}, \tilde{b} \in R$ & $\tilde{a} \cdot \tilde{b} \in \ker(\pi : R \to R/P) = P$

$\Rightarrow \tilde{a} \cdot \tilde{b} \in P \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$.

$\Leftarrow$) EJER.

EJEMPLO: $$\mathbb{Z}[x,y] / (x,y) \simeq \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ $(x,y) \leq \mathbb{Z}[x,y]$ es primo.

COROLARIO: M es maximal $\Rightarrow$ M es primo.

Demostración R/M campo $\Rightarrow R/M$ dominio.

¿Es posible que todo ideal primo sea maximal en algún anillo R?

¿ $K[x] = R$?

Dominios de Dedekind

- $I \leq R$ un ideal primo en un dominio de Dedekind

$\Rightarrow$ R/I es finito pues

$$(r) = (I I') \leq \overbrace{(I) \leq R}^{\text{índice } r}$$

$$\underbrace{(I I') \leq (I) \leq R}_{\text{índice } s < \infty}$$

sabemos $r | s$.

Además R/I es dominio.

$\Rightarrow$ R/I dominio finito $\Rightarrow$ campo.

$\Rightarrow$ I es <u>maximal</u>