Álgebra Moderna II : 17 mayo

Clase pasada: $R_D \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ Dominios de Dedekind.

$$R_D = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{D+\sqrt{D}}{2}\right) \subseteq \mathbb{C}$$

<u>$D<0$</u>

$$0 \neq I \trianglelefteq R_D$$

Índice finito $\quad (R_D : I) = N I$

$I = (\alpha)$, entonces $N I = N(\alpha)$

Hoy: Hipótesis de Riemann

¿Qué tan lejos está R_D de ser DIP?

¿Los ideales de R_D forman un grupo?

Recordar no todo ideal primo es principal.

Ideales fraccionales de R_D

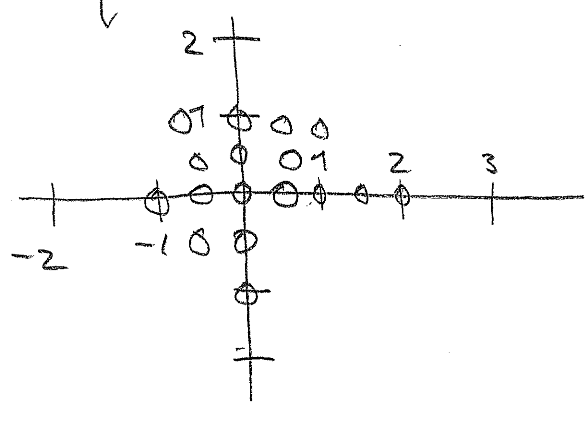
$$I \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \text{Campo de fracciones de } R_D$$

- retícula (subgp discreto)
- estable bajo multiplicación de R_D.

Eg: $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \setminus R_D$ $\beta \neq 0$ &

$$I = \beta \cdot R_D$$

$R_{-4} = \mathbb{Z}[i]$ $\beta = 1/2$ $I = 1/2 R$



Multiplicación de ideales fraccionales

$$I \cdot J = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i \in I \\ b_i \in J \end{array} \right\}$$

Eg:

$$(\alpha R) \cdot (\beta R) = (\alpha \cdot \beta) R$$

$$(1+i)R \cdot (1-i)R = (2)R$$

<u>Proposición</u>: (Kummer, Dedekind)

1) Los ideales fraccionales forman un grupo con la multiplicación. G
(i.e. ¡existen los inversos!)

2) Los ideales principales forman un subgrupo. H

Nota: $R_{-3} = \underbrace{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)}_{\text{Aquí el teorema anterior es cierto}} \underset{2}{\supseteq} \underbrace{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\right]}_{\text{Aquí el teorema anterior es falso.}}$

Sí R_D es DIP $\Longleftrightarrow$ $H = G$

Teorema El grupo cociente $G/H = C_D$ es un grupo finito.

Se le llama grupo de clases de ideales.

OBSERVAR: G es infinito (abeliano)

H es infinito

$h_D =$ órden del grupo C_D.

$=$ Número de clase de R_D.

D	h_D		R_D
			$\alpha^2+\alpha+1=0$
-3	1		$\mathbb{Z}[\alpha]$
-4	1		$\mathbb{Z}[i]$
-7	1		
-8	1		
-11	1		
-15	2		$\mathbb{Z}[\sqrt{-15}]$
-19	1		
-20	2		$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$
-23	3		
$\vdots$	$\vdots$		
-163	$\underline{1}$		

nunca más h_D vale vale[?] 1.

Parecía que h_D crecía como $|D|$.

Gauss: $h_D \approx |D|^{1/2}$

→ R_D se vuelven más y más complicados conforme $|D| \to \infty$.

$$c' |D|^{1/2} / \log|D| < h_D < c\, |D|^{1/2} \log|D|$$

problema abierto

se sabe

con c, c' constantes independientes de D.

$\Rightarrow$ h_D toma un valor un número finito de veces (como $h_D = 1$ 9 veces)

Euler: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\substack{p \\ \text{primos}}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \zeta(s)$$

$s>1$

$$= \prod_{\substack{p \\ \text{primos}}} \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)$$

siguiendo

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$$

Dirichlet (1837) $$\sum_{\substack{I\subseteq R_D \\ I\neq 0}} \frac{1}{(\mathbb{N} I)^s} = \prod_{\substack{P \\ \text{ideales} \\ \text{primos}}} \left(1-\frac{1}{\mathbb{N} P}\right)^{-1}$$

$s>1$

$p \in \mathbb{Z}$ primo. Entonces

(1) pR_D es un ideal primo con $\mathbb{N}(pR)=p^2$

(2) Existen P, P' t.q.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, dash] & \\ pR \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & R \\ & P' \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

$$PP' = pR$$

Dirichlet:

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^s}\right)$$

$$\zeta_R(s) = \prod_{\substack{P \\ \text{ideales primos}}} \left(1-\frac{1}{NP^s}\right)^{-1} = \prod_{\substack{p \\ \text{primos}}} \left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

La función $\zeta(s) = \prod_{p,\ \text{primos}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$

$$L(s) = \frac{\zeta_R(s)}{\zeta(s)} = \prod_{\substack{p\in \mathbb{Z} \\ \text{primo}}} \left(1 \pm p^{-s}\right)^{-1}$$

Veamos el caso $R_0 = \mathbb{Z}[i]$

$$L(s) = \prod_{p\equiv 1(4)} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\equiv 3(4)} \left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \frac{1}{11^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{\pm 1}{n^s}$$

OBSERVAR: $L(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Teorema (Dirichlet) $\boxed{L(1) = \frac{2\pi}{\sqrt{|D|}} \cdot \frac{h_D}{\# R_D^*}}$

Para los anillos $R_D \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

Eg: en $R_D = \mathbb{Z}[i]$ $L(1) = \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{h_D}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot h_D$

$\Rightarrow h_D = 1$ & R_D es un DIP.

= Fórmula del número de clase =.

COROLARIO Si $L(1) \approx 1 \Rightarrow h_D \approx |D|^{1/2}$