Álgebra Moderna II : 7 Junio 2017

Clase pasada: formas reducidas

&

número de ellas $h(D)$

Hoy: $h(D) =$ número de clase $= h_D$.

Sea $ax^2 + bxy + cy^2$
— primitiva
— positiva
— Discriminante D.

le asociamos un ideal $I \subseteq R_D \subset \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$

$$I = a\mathbb{Z} + (-b+\sqrt{D})/2\,\mathbb{Z}$$

↑

es un $\mathbb{Z}$-módulo.

OBSERVACIÓN: Un ideal $I \subseteq R_D$ tiene la estructura de R_D-módulo.

más aún, $I = \alpha \cdot \mathbb{Z} + \beta \mathbb{Z}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$

es un $\mathbb{Z}$-módulo.

¿Podemos asociarle a un ideal una forma? ↳ fraccional (?)

↳ Sea I un $\mathbb{Z}$-módulo $\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$

con base $\{\alpha, \beta\}$, entonces le asociamos

$$\mathbb{N}(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(\alpha' x + \beta' y)$$

$$= \alpha \cdot \alpha' x^2 + \underbrace{(\alpha \beta' + \beta \alpha')}_{\text{Deseamos} \geq 0} xy + \beta \cdot \beta' y^2$$

$$= f(x, y)$$

Def. I Dos ideales $I, J \subseteq R_D$ son equivalentes si existen ideales principales (λ_1) y (λ_2) tal que

$$I \cdot (\lambda_1) = J \cdot (\lambda_2).$$

¿Ideales equivalentes corresponden a formas equivalentes?

Def II Dos ideales fraccionales $I, J \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ son equivalentes si existe $\gamma \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ tal que

$$I = \gamma J.$$

norma positiva.

Tenemos la asociación:

$$\underbrace{\{\alpha, \beta\}}_{\substack{\text{base del} \\ \text{campo } \mathbb{Q}[\sqrt{D}]/\mathbb{Q}}} \xrightarrow{\Psi} \underbrace{f(x,y)}_{\substack{\text{forma} \\ \text{- primitiva} \\ \text{- positiva definida}}}$$

<u>Teorema:</u>

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{l} \text{el conjunto de módulos} \\ \text{en } \mathbb{Q}[\sqrt{D}] \end{array} \right\} \Big/ \underset{\sim}{\text{similitud}}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} \text{clases formas propiamente} \\ \text{equivalentes} \\ \text{positivas definidas} \end{array} \right\}$$

. La función Ψ es una biyección.

Demostración: 1) Las formas f & f' son propiamente equivalentes <u>ssi</u> los módulos asociados $\{\alpha, \beta\}$ & $\{\alpha', \beta'\}$ son equivalentes.

2) Debemos mostrar que para cualquier forma primitiva $g(x,y)$ positiva definida existe una base $\{\alpha, \beta\}$ $\left(\text{con } \det\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha' & \beta'\end{pmatrix} > 0\right)$ para la cual

$$f(x,y) = \frac{\mathbb{N}(\alpha x + \beta y)}{\mathbb{N}(M)} \quad \text{cemade}$$

con $g(x,y)$.

$$\hookrightarrow \quad f = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{primitiva}$$

$$\downarrow$$

$$I = a\mathbb{Z} + (-b+\sqrt{D})/2\, \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\mathbb{N}\left(ax + (-b+\sqrt{D})/2\, y\right)}{\mathbb{N}(I)} = ax^2 - bxy + cy^2$$

$$\sim a^2x^2 + bxy + cy^2.$$

1)

$$f \underset{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}}{\sim} f' \implies \{a, (-b+\sqrt{D})/2\} \overset{?}{\sim} \{A, (-B+\sqrt{D})/2\}$$

com

$$A = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$

$$B = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta$$

$$C = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2$$

= EJERCICIO =