

# Álgebra Moderna II : 7 Junho 2017

Clase pasada: formas reducidas

&  
número de ellas  $h(D)$

Hoy:  $h(D) = \text{número de } \text{clase} = h_D$

---

Sea

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

- primitiva

- positiva

- Discriminante  $D$ .

le asociamos um ideal  $I \subseteq R_D \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$

$$I = a\mathbb{Z} + (-b + \sqrt{D})/2 \mathbb{Z}$$

↑

es um  $\mathbb{Z}$ -módulo.

OBSERVACIÓN: Un ideal  $I \subseteq R_D$  tiene la estructura de  $R_D$ -módulo.

más aún,  $I = \alpha \cdot \mathbb{Z} + \beta \mathbb{Z} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo.

¿Podemos asociar a un ideal una forma?  $\hookrightarrow$  fraccionaria (?)

$\hookrightarrow$  Sea  $I$  un  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$

con base  $\{\alpha, \beta\}$ , entonces le asociamos

$$N(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)(\alpha' x + \beta' y)$$

$$= d \cdot d' x^2 + \underbrace{(\alpha\beta' + \beta\alpha')}_{\text{Decimos } > 0} xy + \beta \cdot \beta' y^2$$

$$= f(x, y)$$

Dois ideais  $I, J \subseteq R_D$  são

Def. I —  $I$  e  $J$  equivalentes se existirem ideais principais  $(\alpha_1)$  e  $(\alpha_2)$  tal que

$$I \cdot (\alpha_1) = J \cdot (\alpha_2).$$

• Ideais equivalentes correspondem a formas equivalentes?

Def. II — Dois ideais fracionários  $I, J \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$  são equivalentes se existe  $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$  tal que  $I = \alpha J$ .

↑  
norma positiva.

Tenemos la asociación:

$$\underbrace{\{\alpha, \beta\}}_{\text{base del campo } \mathbb{Q}[\sqrt{d}]/\mathbb{Q}} \xrightarrow{\Psi} \underbrace{f(x, y)}_{\substack{\text{forma} \\ - \text{ primitiva} \\ - \text{ positiva definida}}}$$

Teorema:

$M = \{ \text{el conjunto de módulos} \}$   
en  $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  / similitud  $\sim$

$\mathcal{F} = \{ \text{formas} \begin{matrix} \text{clases} \\ \text{propriadamente} \\ \text{equivalentes} \\ \text{positivas definidas} \end{matrix} \}$  La función  $\Psi$  es una biyección.

Demostración: 1) Las formas  $f$  &  $f'$  son propriadamente equivalentes ssi los módulos asociados  $\{\alpha, \beta\}$  &  $\{\alpha', \beta'\}$  son equivalentes.

2) Debemos mostrar que para cualquier forma primitiva  $g(x, y)$  positiva definida

existe una base  $\{\alpha, \beta\}$  (con  $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} > 0$ )

para la cual

$$f(x, y) = \frac{N(\alpha x + \beta y)}{N(M)} \quad \text{con } M \text{ de}$$

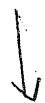
con  $g(x, y)$ .



$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{primitiva}$$



$$I = a\mathbb{Z} + \frac{(-b + \sqrt{D})}{2}\mathbb{Z}$$



$$\frac{N(ax + \frac{(-b + \sqrt{D})}{2}y)}{N(I)} = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$\sim ax^2 + bxy + cy^2.$$

1)

$$f \sim f'$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ a, \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \right\} \sim \left\{ A, \frac{-B + \sqrt{D}}{2} \right\}$$

com

$$A = a\alpha^2 + b\alpha\gamma + c\gamma^2$$

$$B = 2a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2c\gamma\delta$$

$$C = a\beta^2 + b\beta\delta + c\delta^2$$

= EJERCICIO =