25/Agosto.

Recapitulando...

## (I) Números Complejos: definición

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{ z = x+iy : \ x, y \in \mathbb{R} \}$$

con $i = (0,1)$

$+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = ((x_1+x_2), (y_1+y_2))$

$(x_1+iy_1) + (x_2+iy_2) = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$

$\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$

con regla $i^2 = -1$.

* $\mathbb{C}$ es un campo:

$z+w = w+z$

$z+(w+s) = (z+w)+s$

$z+0 = z$ $\qquad 0 = 0+i0$

$z+(-z) = 0$ $\qquad z = x+iy \Rightarrow -z = -x+i(-y)$

$zw = wz$

$(zw)s = z(ws)$

$1z = z$ $\qquad 1 = 1+i0$

$z(z^{-1}) = 1$ para $z = x+iy \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{C}$

$a \longmapsto a + i\cdot(0) = (a,0)$

* $i$ y $-i$ son las únicas soluciones de $x^2+1=0$.

**Def.** Si $z = x+iy \in \mathbb{C}$

$x = \operatorname{Re}(z)$ parte real

$y = \operatorname{Im}(z)$ parte imaginaria.

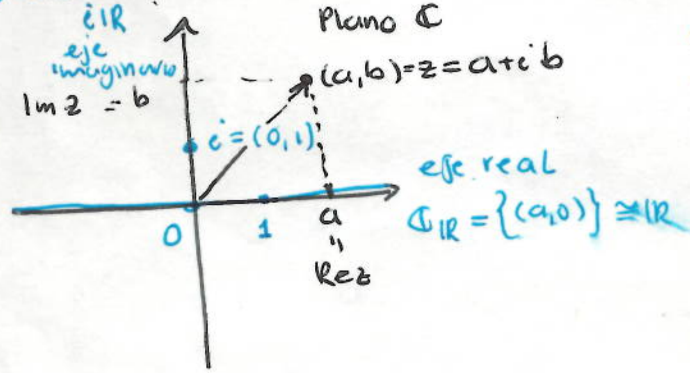
**Obs.** $\mathbb{C}$ No es un campo ordenado.

si lo fuera $i \geq 0$ o $i \leq 0$

si $i \geq 0 \Rightarrow i^2 = i\cdot i \geq 0 \Rightarrow -1 \geq 0$ ¿?

$i \leq 0 \qquad i\cdot i \geq 0 \Rightarrow -1 \geq 0$ ¿?

## (II) Visualización de los números complejos



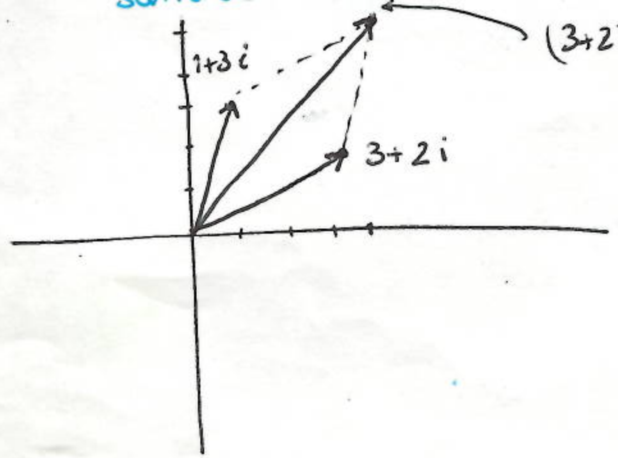

$\operatorname{Re} 1 = 1$

$\operatorname{Im} 1 = 0$

$\operatorname{Re} i = 0$

$\operatorname{Im} i = 1$

suma de números complejos:




$(3+2i) + (1+3i) = 4+5i$

# (III) Otras operaciones:

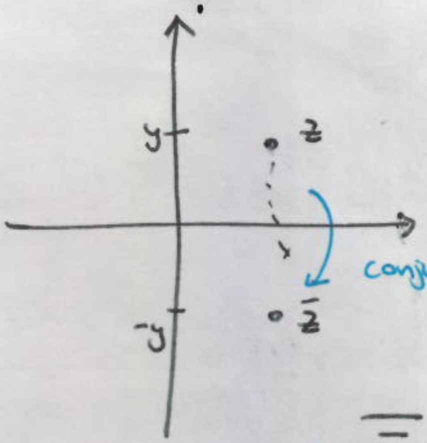
## Conjugación:

$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ — automorfismo con $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ subcampo invariante.

$z \longmapsto \bar{z}$

$x+iy \longmapsto x-iy$

$a+i0 \longmapsto a+i0$




**Prop.** $z, w \in \mathbb{C}$

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

c) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

d) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$

e) $\operatorname{Im} = \frac{z-\bar{z}}{2}$

f) $z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \bar{z}$

g) $z \in i\mathbb{R}$ ssi $z = -\bar{z}$

**Dem.**

c) $\overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)}$

$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2)$

$\parallel$

$\overline{(x_1+iy_1)} \cdot \overline{(x_2+iy_2)} = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)$

f) Si $z = a + i0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = a = z$.

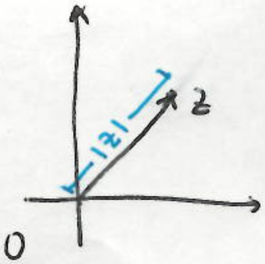
Si $z = x+iy = x-iy = \bar{z} \Rightarrow y = -y \Rightarrow y = 0$.



## Valor absoluto o módulo:

$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$z \longmapsto |z|$




$z = x+iy$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0$

$z\bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$

$\Rightarrow$ si $z \neq 0$

$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{(-y)}{x^2+y^2}$

**Propiedades:**

a) $|z| = 0$ ssi $z = 0$

$z, w \in \mathbb{C}$

b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ← coordenadas polares.

c) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ?

d) $|z \pm w| \leq |z| + |w|$

e) $\big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$

f) $|z| = |\bar{z}|$

Ejemplo.

$(1+i)^{-1} = \frac{1-i}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

**Dem (d)** $|z+w|^2 = (z+w)\cdot\overline{(z+w)}$

$= \cancel{z\bar{w}} + z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w$

$= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$

$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}|$

$= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$

$= (|z|+|w|)^2$. ■

e) Por (d)

$|z| = |w + (z-w)|$

$\leq |w| + |z-w|$

$\Rightarrow |z| - |w| \leq |z-w|$

$|w| = |z + (w-z)| \leq |z| + |w-z|$.