Variable Compleja: 4 de abril

Clase pasada: definición de integral de contorno.

Hoy: Teorema de la integral de Cauchy 1

______ " ______ " ______

Def: $D \subseteq \mathbb{C}$ conjunto. Se dice arco-conexo si para cualesquiera dos puntos $z, w \in D$ $\exists$ una ~~fun~~ curva, suave a trozos, tal que

$\alpha(a) = z$ & $\alpha(b) = w$

donde $\alpha : [a, b] \longrightarrow D$.

Def: $D \subseteq \mathbb{C}$ se dice dominio si es abierto & conexo por arcos (arco-conexo)

Teorema: $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio entonces los siguientes enunciados son equivalentes

1) f tiene primitiva

2) Si α es una curva cerrada en D, entonces
$$\int_\alpha f = 0$$

3) La integral de f a lo largo de cualquier curva depende sólo de los puntos inicial y final de la curva.

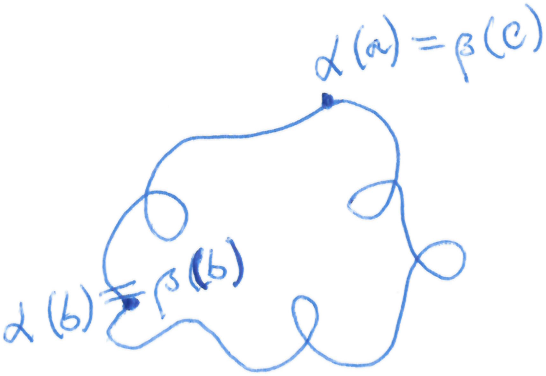
<u>Demostración</u>: $(1) \Rightarrow (2)$ ✓

$(2) \Rightarrow (3)$ α & β dos curvas con los mismos puntos iniciales y finales.

Tenemos que mostrar que
$$\int_\alpha f = \int_\beta f.$$

podemos asumir

$$\alpha:[a,b]\longrightarrow D \quad \& \quad \beta:[c,b]\longrightarrow D$$



entonces

$$0=\int_{\alpha\oplus\bar{\beta}} f=\int_{\alpha} f-\int_{\beta} f .$$

(3) ⇒ (1) Sea $z_0 \in D$ fijo. Consideremos

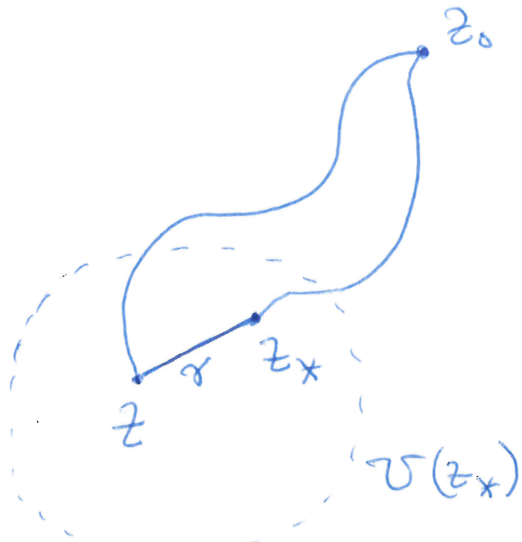
$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\eta)\,d\eta$$

esta integral

<u>NO</u> depende de la

curva que une a

z_0 & z.



entonces

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f = \int_{z_0}^{z_*} f + \int_{\gamma} f = F(z_*) + \int_{\gamma} f$$

observar que $\gamma(t) = z_* + t(z - z_0)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$

entonces

$$F(z) - F(z_*) = f(z_*)(z - z_*) + \underbrace{r(z)}_{\int_{\gamma} [f(y) - f(z_*)]\, d}$$

pero continuidad de f implica

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q. $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ si $|z - z_0| < \delta$

$$\Rightarrow \quad |r(z)| < |z - z_*| \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{F(z) - F(z_*)}{z - z_0} \right| \leq |f(z_*)| + \varepsilon$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \quad \boxed{F'(z_*) = f(z_*)}$$