Variable Compleja 12 abril

Clase pasada: $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto

entonces $\displaystyle\int_{\Delta} f(z)\,dz = 0$

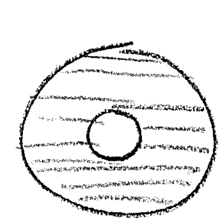
tal que $\blacktriangle \subseteq D$.

Hoy: Teorema de la integral de Cauchy

Def.– $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto se dice estrellado si existe un $z_0 \in D$ tal que $\overline{z_0 z} \subset D$ para todo $z \in D$.

Eg: $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto convexo

NO ejemplo:

* $\mathbb{C}^* = D$
* Anillo  $= D$

Teorema: (de la integral de Cauchy para estrellados)

$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad D \subseteq \mathbb{C}$ $\underbrace{\text{dominio estrellado}}$

* abierto
* conexo
* estrellado

holomorfa en D.

Entonces $\displaystyle\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$ para toda curva γ cerrada.

Demostración: Observar que el enunciado del Teorema es equivalente a:

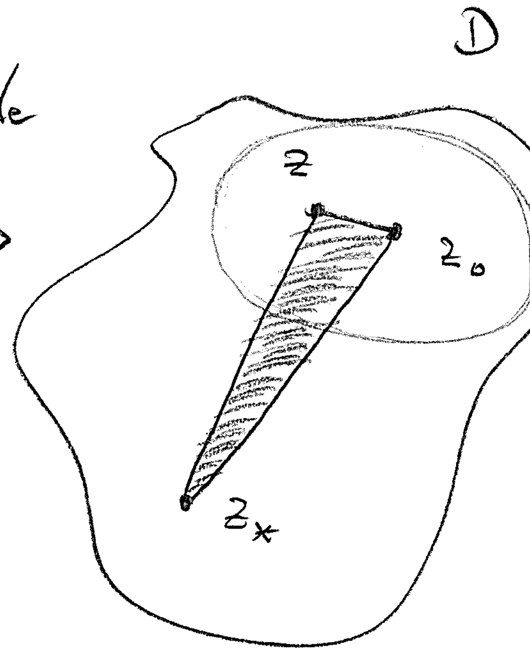
= Cualquier aplicación holomorfa definida sobre un dominio estrellado tiene primitiva en D. =

Por demostrar: f tiene primitiva en D.

Para mostrar esto, sea $z_* \in D$ fijo.

$$F(z) = \int_{z_*}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{\overline{z_* z}} f(\zeta)\,d\zeta$$

observe que para z_0 "cerca" de z tenemos que $\langle z, z_0, z_* \rangle$ está contenido en D.



Por tanto tenemos

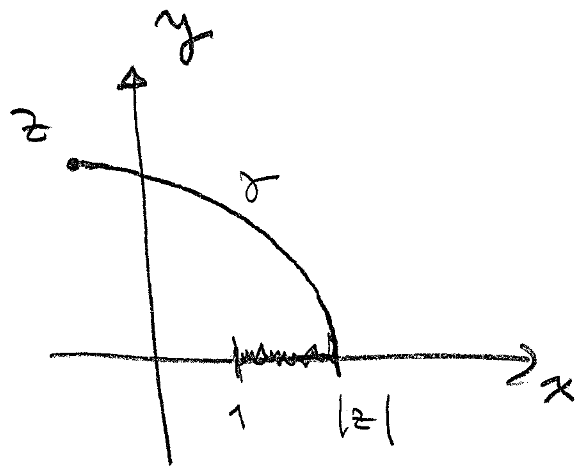
$$\int_{z_*}^{z_0} + \int_{z_0}^{z} + \int_{z}^{z_*} = 0$$

y Repetimos el argumento de la clase pasada para mostrar que $F' = f$. ∎

Definición: $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, se dice dominio elemental si cualquier $f: D \to \mathbb{C}$ holomorfa tiene primitiva en D.

Eg: $$L(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$ definida en $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0) = \mathbb{C}_-$

$$L(z) = \int_1^{|z|} \frac{1}{t}\,dt + i\int_0^{\varphi} dt$$



$$= \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) = \underbrace{\log(z)}$$

Rama principal del Logaritmo