Variable Compleja: 17 abril

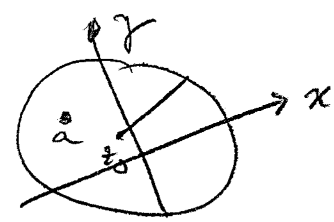
Clase pasada: $\int_\gamma f = 0$ si $f: D \to \mathbb{C}$ holomorfa en $D =$ estrellado.

Hoy: Formula integral de Cauchy

$a \in B(z_0, r)^\circ$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \qquad \gamma(t) = z_0 + re^{it}$$

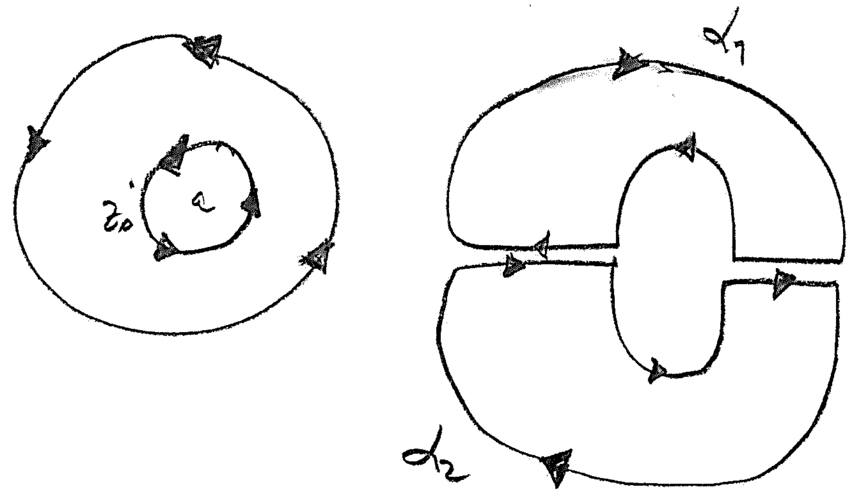
$z_0 \in \mathbb{C} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad r > 0$



Más aún

$$\oint_{|z-a|=r} \frac{dz}{z-a} = \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z-a}$$

Demostración:



$$\int_{\alpha_1} \frac{d\gamma}{\gamma - a} = 0 \quad \& \quad \int_{\alpha_2} \frac{d\gamma}{\gamma - a} = 0$$

entonces sumando las integrales

$$\int_{\alpha_1 \oplus \alpha_2} \frac{d\gamma}{\gamma - a} = 0 \implies \int_{\alpha_1} \frac{d\gamma}{\gamma - a} = \int_{-\alpha_2} \frac{d\gamma}{\gamma - a} = 2\pi i$$

Teorema (Fórmula integral de Cauchy)

$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \underset{\text{abierta}}{D \subseteq \mathbb{C}}$ holomorfa.

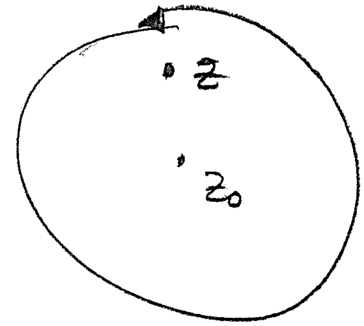
Asumir que $\overline{D_r}(z_0) = \{ a \in \mathbb{D} \mid |z - a| \leq r \} \subset D$

Entonces, para cada $z \in D_r(z_0)$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\gamma)\, d\gamma}{\gamma - z} = f(z)$$

donde $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

Demostración



Observar $\exists\, R > r$ tal que

$$D \supset U_R(z_0) \supset \overline{U_r}(z_0)$$

por tanto podemos asumir $D = U_R(z_0)$.

$$g(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

es holomorfa en $D \setminus \{z\}$ & continua en D.

$\Rightarrow g$ tiene primitiva en $D \Rightarrow$

entonces $$\oint \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw = 0 \quad \Rightarrow$$

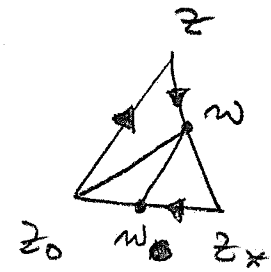
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}}$$

Lema: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ continua en un dominio estrellado $D \subseteq \mathbb{C}$ con centro z_*

Si f tiene derivada en $D \setminus z_*$, entonces tiene primitiva en D.

Demostración: Suficiente demostrar

$$\int_{z_*}^{z_0} + \int_{z_0}^{z} + \int_{z}^{z_*} = 0 \quad \forall$$



$\subseteq D$

entonces

$$\int_{\langle z_*, z_0, z \rangle} = \int_{\langle z_*, w_0, w \rangle} + \int_{\langle w_0, z_0, w \rangle} + \int_{\langle z_0, z, w \rangle} = \int_{\langle z_*, w_0, w \rangle}$$

tomando límite

$w \longrightarrow z_*$; $w_0 \longrightarrow z_*$