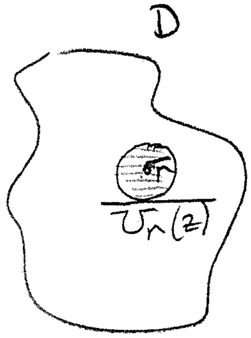
Variable Compleja : 25 abril

Teorema: (Fórmula integral de Cauchy generalizada)

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en $\underset{\text{abierto}}{D} \subseteq \mathbb{C}$.

Asumamos, entonces $z \in U_r(z_0)$



$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

con $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

Demostración: observemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)\, dw}{w - z}$$

Tomando derivada con respecto a z.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} \oint_\gamma \frac{f(w)\, dw}{w - z}$$

$$\overset{\boxed{\text{Lema Leibniz}}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(w)\, dw}{w - z} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)\,dw}{(w-z)^2}$$; Procedemos por inducción. $\blacksquare$

Teorema (Morera) 1886 $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto

$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ continua.

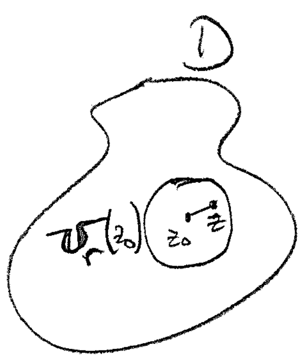
Para todo triángulo $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle \subseteq D$ asumir

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(w)\,dw = 0.$$ Entonces

f es holomorfa.

<u>Demostración:</u>

$$F(z) = \int_{\langle z_0, z \rangle} f(w)\,dw$$



F es la primitiva de f en $U_r(z_0)$. Entonces f es holomorfa en $U_r(z_0)$ pues es la derivada de $F(z)$. $\blacksquare$

Def. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa se dice entera

Una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ es entera.

Teorema (Liouville 1847) Una función entera acotada es constante.

Demostración: mostraremos que $f'(z) = 0$.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(w)\,dw}{(w-z)^2} \qquad \gamma = \{|w-z| = r\} \quad r > 0.$$

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \underbrace{(2\pi r)}_{\text{longitud de arco}} \frac{c}{r^2} = \frac{c}{r}$$

$\Rightarrow$ si $r \to \infty$ entonces $|f'(z)| \leq \frac{c}{r} \to 0$

por tanto $f'(z) = 0$

$\blacksquare$