Variable Compleja 25 abril

Teorema: (Fundamental del álgebra)

Todo polinomio no constante con coeficientes complejo tiene una raíz.

Demostración:

$$P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n \qquad a_i \in \mathbb{C}$$

$$a_n \neq 0$$

$$n \geq 1$$

Por tanto $|P(z)| \to \infty$ si $|z| \to \infty$

i.e. para cada $C > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|z| \geq R \implies |P(z)| \geq C.$$

Asumamos $P(z)$ no tiene raíces. Entonces $1/P(z)$ es entera y acotada, y por tanto constante. (Liouville). ∎

COROLARIO

$$P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$$

Demostración: Del teorema anterior sabemos $\exists$ $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P(\alpha)=0$.

$$\Rightarrow \quad P(z) = (z-\alpha)\underbrace{Q(z)}_{\text{le aplicamos el teorema anterior \& Inducción.}}$$

$\boxed{\text{Σ}}$

Pregunta: $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ entera no constante.

¿Qué podemos decir de $f(\mathbb{C})$ más allá que no es acotado?

¿Existen funciones enteras doble periódicas que sean holomorfas en $\mathbb{C}$?

¿Podemos representar a una función holomorfa por series de potencias? (Serie de Taylor)