Variable Compleja I : 26 Feb 2018

Teorema: Existe un campo $\mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

1) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ subcampo

2) $x^2+1=0$ tiene dos soluciones en $\mathbb{C}$: i & $-i$ ¡exactamente!

3) $$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) &\longmapsto x+iy \end{aligned}$$ biyección

$\mathbb{C}$ es llamado EL CAMPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

Demostración: Definamos en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1) $(x,y)+(z,w)=(x+z,\, y+w)$

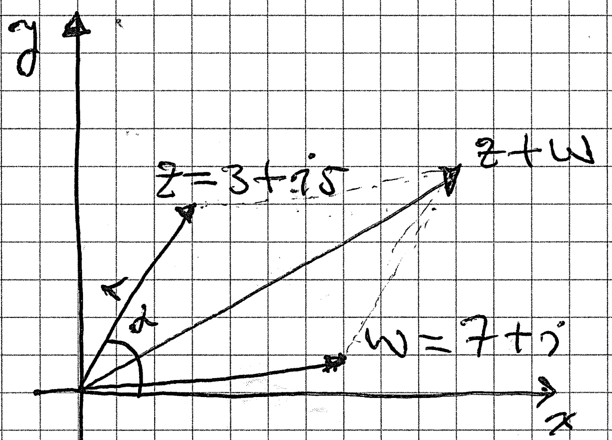
2) $(x,y)\cdot(z,w)=(xz-yw,\, xw+yz)$

$\mathbb{C} := (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \cdot, +)$ NÚMEROS COMPLEJOS.

Tarea: completar la demostración

Tenemos $\mathbb{C}$ campo: podemos sumar multiplicar, dividir*, tomar raíces.

Suma:



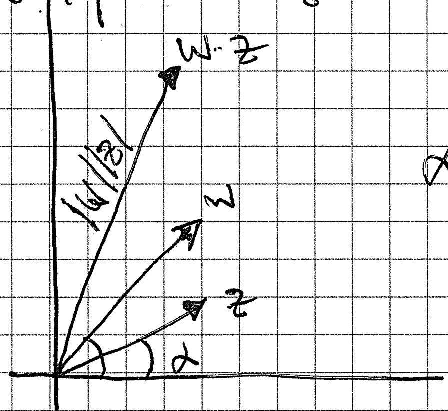
Forma polar de un complejo ($\neq 0$)

$$z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

$$r = |z|$$

$$\alpha = \underset{\text{de } z}{\text{argumento}} = \arg(z)$$

Multiplicar:



$\alpha = \mathrm{Arg}(z)$ $\quad\beta = \mathrm{Arg}(w)$

- $\mathrm{Arg}(z\cdot w) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w)$
- $|z\cdot w| = |z||w|$

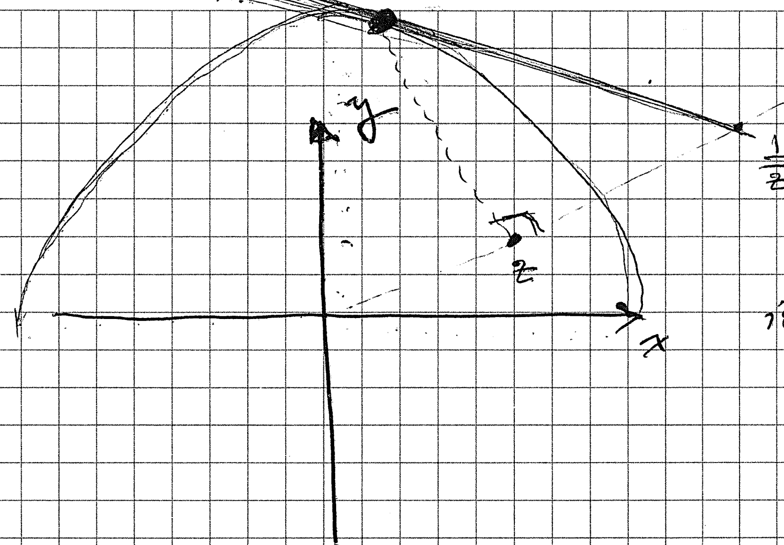
Dividir:

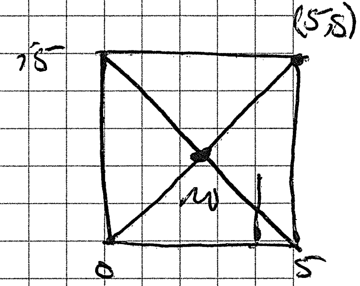
$$z = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \neq 0$$

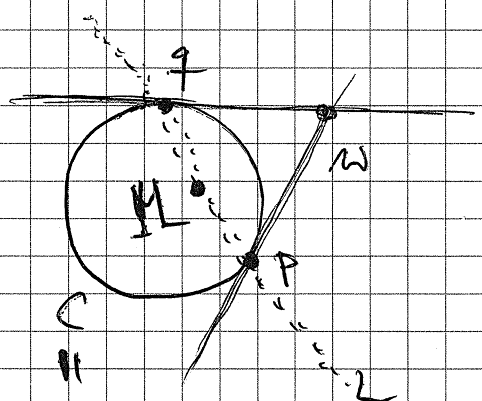
$$|z|^2 = z\cdot\bar{z} \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

Tarea: $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ¿son z & $(\bar{z})^{-1}$

Tarea:







$C = \{z \mid |z|=1\}$

L = línea polar de w con respecto a C.

Escribir M, el punto medio entre $\overline{pq}$, en términos del número w.

Teorema: Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen exactamente n raíces de la unidad

$0 \leq k < n$ $$\zeta = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \operatorname{Sen}\frac{2\pi k}{n}$$

Demostración: raíces de la unidad son raíces del polinomio $\boxed{z^n = 1}$