Variable Compleja I : 6 marzo

Clase pasada: raíces de la unidad

Hoy: sucesiones y series convergentes.

<u>Def.</u> Una sucesión $(z_n)_{n\geq 0}$ de números complejos es convergente a z si para todo $\varepsilon>0$ $\exists$ N tal que $|z_n - z|<\varepsilon$ con $n>N$.

en este caso escribimos $\lim_{n\to\infty} z_n = z$

<u>Proposición:</u> $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ si y sólo si

$\lim_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(z)$ & $\lim_{n\to\infty} Im(z_n) = z$.

Sea $(z_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números complejos. La suma parcial

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} z_i = z_0 + z_1 + \cdots + z_k$$

La serie asociada a $(z_n)_{n\geq 0}$ se define

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + \cdots$$

__Def:__ La serie $\sum^{\infty} z_n$ converge si la sucesión de sumas parciales $(S_k)_{k\geq 0}$ es convergente.

Ej: $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots$ converge si $|z| < 1$

Def.- La Serie $\sum^{\infty} z_k$ se dice absolutamente convergente si $\sum^{\infty} |z_k|$ converge.

Propo Una Serie absolutamente convergente es convergente.

Tarea: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ es convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

absolutamente convergentes.

Def.-

$$Exp(z) = \sum^{\infty} \frac{z^n}{n!} \; ; \quad \cos(z) = \sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$