1

Variable Compleja 1 : 7 de marzo

Clase pasada: Definición de serie convergente

Hoy: Función exponencial compleja

— " —

Las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \quad ; \quad \sum \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{Sen}(z)$$

$$\sum \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z)$$

son absolutamente convergentes.

<u>Teorema</u>: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Demostración: multiplicación de Cauchy respeta convergencia de series.

Corolario: $e^{z} \neq 0 \quad \forall\ z \in \mathbb{C}$

Dem: $e^{z} \cdot e^{-z} = 1$

Además $\left(e^{z}\right)^{n} = e^{z} \cdot e^{z} \cdots e^{z} = e^{nz}$

Proposición: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$$\boxed{\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{Sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}}$$

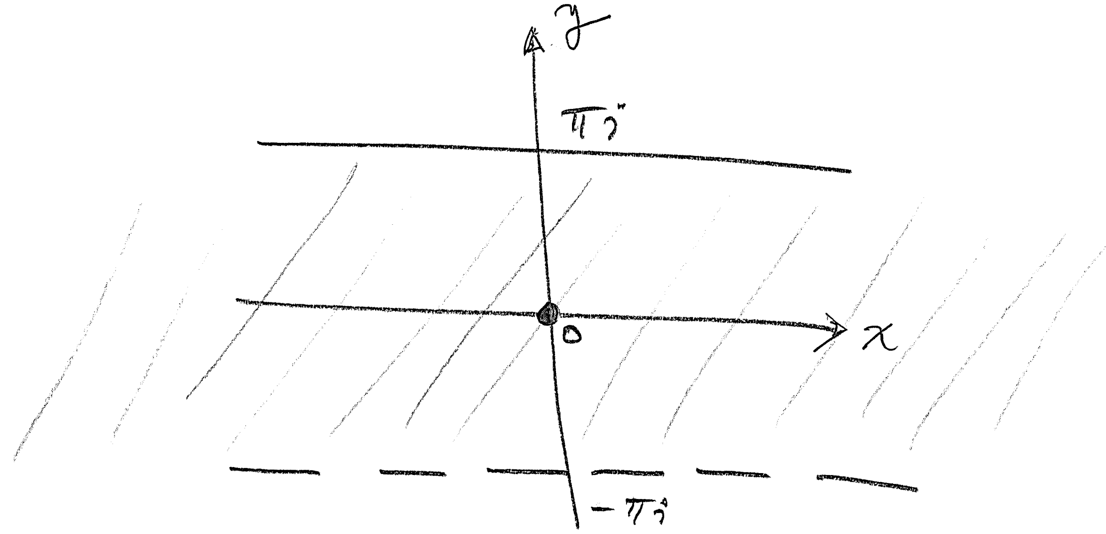
Coro: $e^{z} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) \qquad z = x + iy$

OBSERVAR: $e^{2\pi i k} = 1 \qquad \forall\ k \in \mathbb{Z}$

en particular $\qquad e^{z} = e^{w} \iff z - w \in 2\pi i \mathbb{Z}$.

Rama de logaritmo

$$S = \{ w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi \}$$



$$e : S \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad w \longmapsto e^w$$

es inyectiva; Por tanto tiene inversa: $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

<u>Teorema:</u> Existe una función

$$\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$ determinada

por

a) $e^{\operatorname{Log} z} = z$ b) $-\pi < \operatorname{Im} \log z \leq \pi$

$\forall z \in \mathbb{C}^*$