Variable Compleja I: 8 de marzo

Clase pasada: La exponencial

Hoy: Logaritmo

— // —

$$S = \{ w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}\, w \leq \pi \}$$

$e : S \longrightarrow \mathbb{C}^*$ inyectiva (supreyectiva)

TEO: Existe una función $\mathrm{Log} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

determinada por a) $e^{\log(z)} = z$

b) $\underbrace{-\pi < \mathrm{Im} \log z \leq \pi}_{\text{Rama principal}}$ $\forall z \neq 0$

OBSERVACIÓN:

$$e^{\log(w) + 2\pi i k} = w$$

Teorema: $z \in \mathbb{C}^*$, entonces

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i\,\underbrace{\operatorname{Arg}(z)}_{-\pi < \varphi \leq \pi}$$

Dem.: $$e^{\log|z| + i\operatorname{Arg}(z)} = e^{\log|z|}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

$$= |z|(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = z.$$

Información nueva: $a \in \mathbb{C}^*$ $b \in \mathbb{C}$

~~Podemos~~ definir $a^b = e^{(b\log a)}$

Podríamos

Sin embargo esto no funciona bien

pues

$$e^{b\log a} \neq e^{b(\log a + 2\pi i k)} \quad \text{si } b \notin \mathbb{Z}.$$

Por tanto cada valor $\boxed{e^{b(\log a)} \cdot e^{2\pi i k b}}$

Se puede considerar como a^b.

Usando la rama principal del logaritmo

entonces

$$i^i = e^{i\log(i)} = e^{i(\log|i| + i\pi/2)}$$

$$= e^{-\pi/2} \approx 0.2078\ldots$$

OBSERVACIÓN: $z^n = 1$ raíces de la unidad

$\{1, \zeta_n, \ldots, \zeta_n^{n-1}\}$ son las $\frac{1}{n}$-ésimas

raíz de 1 !!

EJEM. ¿ $\operatorname{Sen}^2(z) + \operatorname{Cos}^2(z) = 1 \quad z \in \mathbb{C}$?