Variable Compleja 1: 13 de marzo

Clase pasada: Logaritmo complejo.

Hoy: raíces n-ésimas de un complejo

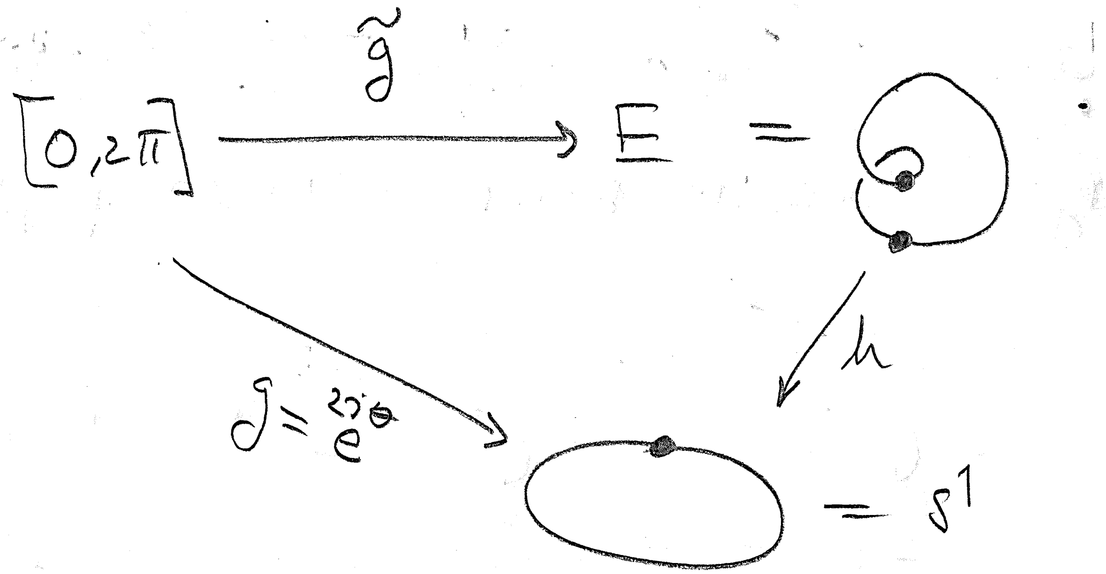
$$[0,2\pi] \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* \qquad z = x + iy$$

$$\theta \qquad z \longmapsto e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta \overset{\pi}{\longmapsto} \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \\[2em] [0,2\pi] \overset{\pi}{\longmapsto} S^1 \subseteq \mathbb{C}^* \end{array}}$$

<u>OBSERVAR</u>: $\left|\pi^{-1}(z)\right| = 1$

OBSERVAR:



¿Quién es E?

¿Quién es $\tilde{g}$?

$\hookrightarrow E = \text{Imagen}(g)$

pero ¡no en $\mathbb{C}$!

(pues considerar $E \subseteq \mathbb{C}$ no podemos distinguir entre $g(0)$ y $g(\pi)$)

Observemos que

$$\pi^2 = g$$

por tanto para entender la imagen de g (i.e. E), tenemos que entender

$$E = \{ (\underbrace{g(z)}_{z}, \underbrace{\pi(z)}_{w}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid \pi^2(z) = g(z) \}$$

$$= \{ (z, w) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid w^2 = z \}$$

$$\text{“}=\text{”} \{ (z, \sqrt{z}) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid$$

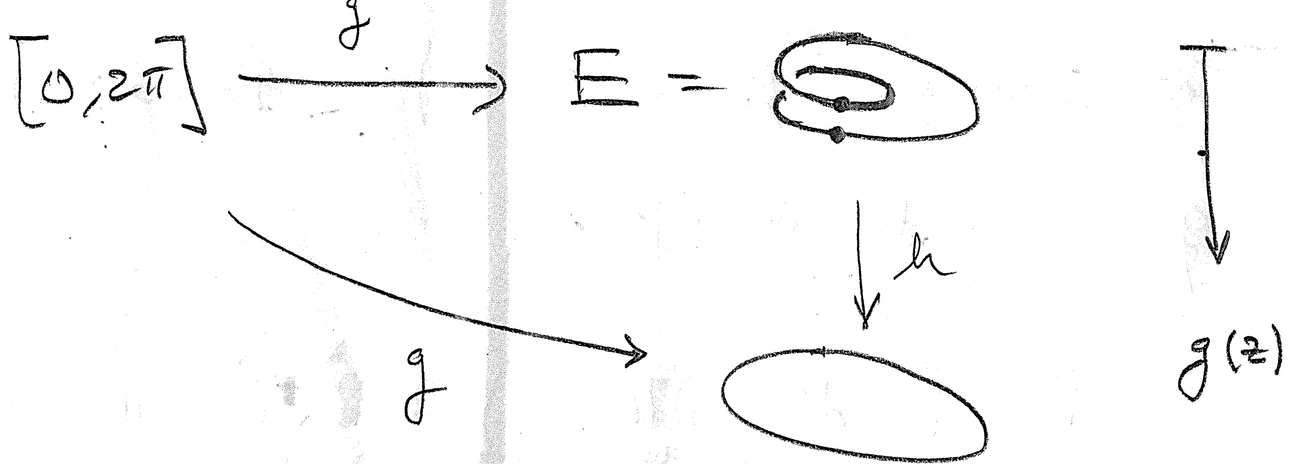
En E sí podemos distinguir entre $g(0)$ & $g(\pi)$ pues

$E \ni (g(0), \pi(0))$ & $(g(\pi), \pi(\pi)) \in E$

son puntos distintos.

↳ Tenemos derecho a dibujar $E =$ 

$$= \{(g(z), \pi(z)) \mid \pi^2 = g\}$$



Proposición: h localmente es un homeomorfismo (en particular es inyectiva).

Demostración: $t \in [0, 2\pi]$

$$\left.\begin{array}{c} t \longmapsto (e^{2it}, e^{it}) \\ \big\downarrow \\ e^{2it} \end{array}\right\} \text{localmente inyectiva}$$

$\boxed{}$

Por lo tanto, a nivel de conjuntos hasta ahora, existe la inversa de h localmente!

notar:
$$f(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4\cdot 2!} + \frac{3z^3}{2^3\cdot 3!} - \frac{5z^5}{2^4\cdot 4!} + \cdots$$

Converge si $|z| < 1$.

Más aún, en este dominio, vemos que coincide con $f(z) = \sqrt{1+z}$.

Pregunta: ¿puede ser f la inversa (local) de h?

De ser así tendríamos

$$\begin{tikzcd} E = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2\} \arrow[d] & (z,f(z)) \arrow[d, mapsto] \\ \mathbb{C} \ni & z \end{tikzcd}$$

$$= \{(z,w) \mid w^2 = z\}$$

local

$$= \{(z, \sqrt{z})\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

E es la "gráfica" de $\sqrt{z}$.

Resolver multivaluada

¿Qué es una rama de la raíz cuadrada $\sqrt{z}$?