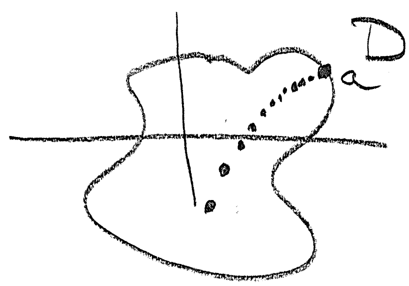
Variable Compleja 1 : 14 de marzo

Clase pasada: Raíz cuadrada (en lugar de continuidad)

Hoy: ~~Derivadas~~

Conocemos el concepto de punto de acumulación en $\mathbb{C}$:



$\forall\, \varepsilon > 0$

$\exists\, z \in D$ con $|z-a| < \varepsilon$

Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ aplicación.

$\lim_{z \to a} f(z) = l$ ssi $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que

$|f(z) - l| < \delta$ si $|z-a| < \varepsilon$

$z \neq a$

$\forall\, z \in D$

Definición: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad D \subseteq \mathbb{C}$

aplicación se dice diferenciable (compleja) en $a \in D$

si ~~ssi~~ $\lim_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$ existe.

Teorema: f & g (complejo) diferenciables en $a \in D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces

$$f+g \ , \quad \lambda f \ , \quad f \cdot g \quad \& \quad \frac{1}{f} \text{ si } f(a) \neq 0$$

son diferenciable en a.

Teorema: $$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Regla de la cadena.

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ aplicación. Supongamos

f es diferenciable en el sentido real.

$$\left(\lim_{z \to a} \frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|} \text{ existe} \right)$$

Pregunta: ¿Qué relación (si existe) hay entre la derivada real y la derivada compleja?

Recordar

$J(f,a)$ = Jacobiana de f en a.

$: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal ($\mathbb{R}$)

<u>OBSERVACIÓN</u>: f es complejo diferenciable en a

<u>sii</u> f es diferenciable en a y la Jacobiana

$$J(f,a)(z) = \ell z \quad (f'(a)\, z)$$

número complejo ($f'(a)$).

<u>Demostración</u>: (Tarea)

Pista: Teorema del valor intermedio

Pregunta: ¿Qué $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal satisface que

$\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(x) = z_0 \cdot x$?

operación en $\mathbb{C}$.

i.e. ¿Cuándo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-lineal es $\mathbb{C}$-lineal?

OBSERVACIÓN: $A: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-lineal, entonces

1) $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$ con $A(z) = z_0 \cdot z$ operación de $\mathbb{C}$.

ssi 2) A es $\mathbb{C}$-lineal

ssi 3) $A(i) = iA(1)$ ← solo importa la acción de A en un básico.

ssi 4) con respecto a la base canónica $(1,0)$ & $(0,1)$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Demostración: $(1) \Longleftrightarrow (4)$ (Tarea). ✓

Consecuencia: $f = u + iv$ $\left(\text{eg: } f(z) = z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u} + i\underbrace{2xy}_{v} \right)$

entonces $J(f,a) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\Big|_a$ y por tanto

$$\boxed{u_x = v_y\big|_a \ \& \ v_x = -u_y\big|_a}$$ Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Cauchy-Riemann impone condiciones fuertes en u & v (donde $f = u + iv$ $\mathbb{C}$-diferenciable

Por ejemplo:

$$\left.\begin{aligned} \partial_x^2 u &= \partial_x(\partial_y v) \\ \partial_y^2 u &= \partial_y(-\partial_x v) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\partial_x^2 + \partial_y^2)\, u = 0$$

es decir, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ el Laplaciano,

entonces $\boxed{\Delta u = 0}$ u satisface el Laplaciano Δ

$\parallel$

¡ u es harmónica !

(y por tanto v también es harmónica)

¿Qué tan especiales son las funciones harmónicas en análisis real?

i.e. ¿Qué propiedades tienen?