Variable Compleja: 15 de marzo

Clase pasada: Derivadas

Hoy: Aplicaciones holomorfas

Definición: Una aplicación $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto se dice holomorfa en D si es complejo-diferenciable para todo punto en D.

Notar que el texto usa analítica en lugar de holomorfa.

Proposición: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ ($D \subseteq \mathbb{C}$ abierto) holomorfa con parte real e imaginaria C^2. Entonces la parte real e imaginaria son funciones armónicas.

<u>Demostración</u>: $f = u + iv$

entonces f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann por ser holomorfa.

por tanto
$$\partial_x^2 u = \partial_x \partial_y v$$
$$\partial_y^2 u = \partial_y(-\partial_x v)$$

$$\Rightarrow (\partial_x^2 + \partial_y^2) u = \boxed{\Delta u = 0}$$

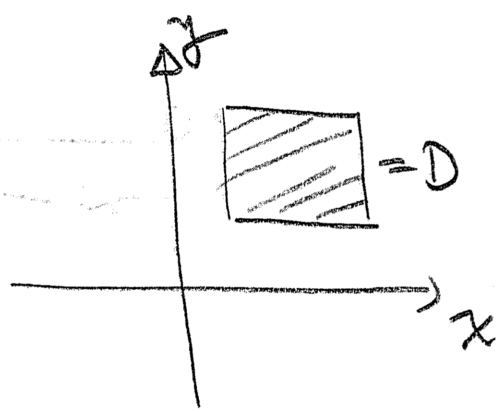
Laplaciano.

<u>Pregunta</u>: Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmónica, i.e.
$$\Delta u = 0$$
¿Existe $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmónica tal que $f = u + iv$ sea holomorfa?

Proposición: $D \subseteq \mathbb{C}$ rectángulo abierto con lados paralelos a los ejes. Sea $u: D \longrightarrow \mathbb{R}$ harmónica. Entonces $\exists\ f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con parte real u.

Demostración:

$$D = (a,b)\times(c,d)$$



si

$\partial_x u = \partial_y V$ entonces

$$V = \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,t)\,dt + \underbrace{h(x)}_{¿?}$$

Observemos

$$\partial_x V(x,y) = \int_{y_0}^{y} \partial_x^2 u(x,t)\,dt + h'(x)$$

$$= -\int_{y_0}^{y} \partial_y^2 u(x,t)\,dt + h'(x)$$

$$= \partial_y u(x,y_0) - \partial_y u(x,y) + h'$$

$$\partial_x V(x,y) = \partial_y u(x,y_0) - \partial_y u(x,y) + h'(x)$$

$$\Rightarrow \quad h'(x) = -\partial_y u(x,y_0)$$

Por tanto $\quad V(x,y) := \int_{y_0}^{y} \partial_x u(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} \partial_y u(t,y_0)\,dt$

Basta verificar Cauchy-Riemann para terminar el argumento. $\square$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE : $\quad u(x,y) := \log|z|$

es harmónica en $\mathbb{C}^*$

Sin embargo, no existe $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\mathrm{Re}(f) = u$. ¿Por qué?

Ej:
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

$$\partial_x u = 3x^2 - 3y^2 \qquad \text{si } (x_0, y_0) = (0,0)$$

$$\partial_y u = -6xy \qquad \Rightarrow \boxed{\partial_y u(x,0) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad v(x,y) = \int_0^y (3x^2 - 3t^2)\,dt = 3x^2 y - y^3$$

Por lo tanto $\quad z = x + iy$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3)$$

$$= \underline{\underline{z^3}}. \ //$$