Variable Compleja : 21 de marzo

Clase pasada: Cauchy-Riemann & conjugada armónica

Hoy: Aplicaciones Conformes.

Def. $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineal se dice que preserva orientación si $\det T > 0$

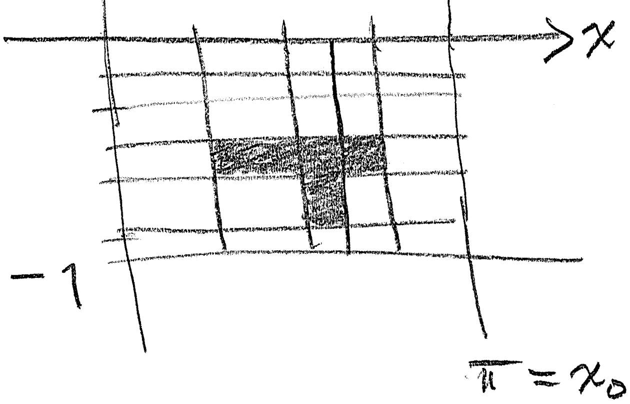
Se dice que preserva ángulos si $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$

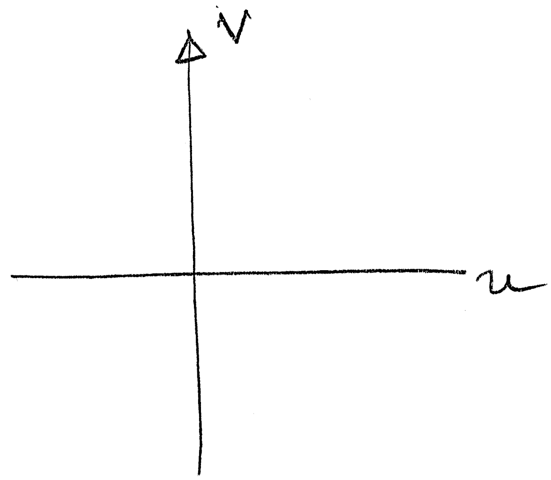
$$|Tx|\,|Ty|\,\langle x, y\rangle = |x|\,|y|\,\langle Tx, Ty\rangle$$

Ej: $f(z) = \bar{z}$ no preserva orientación: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = f$

Def. $f : D \longrightarrow D'$ $\quad D, D' \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos continua y $\mathbb{R}$-diferenciable se dice <u>CONFORME</u> en D si $J(f, a)$ preserva orientación y ángulos para todo $a \in D$.

$$= u + iv$$
$$f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$
$$= \cos z$$





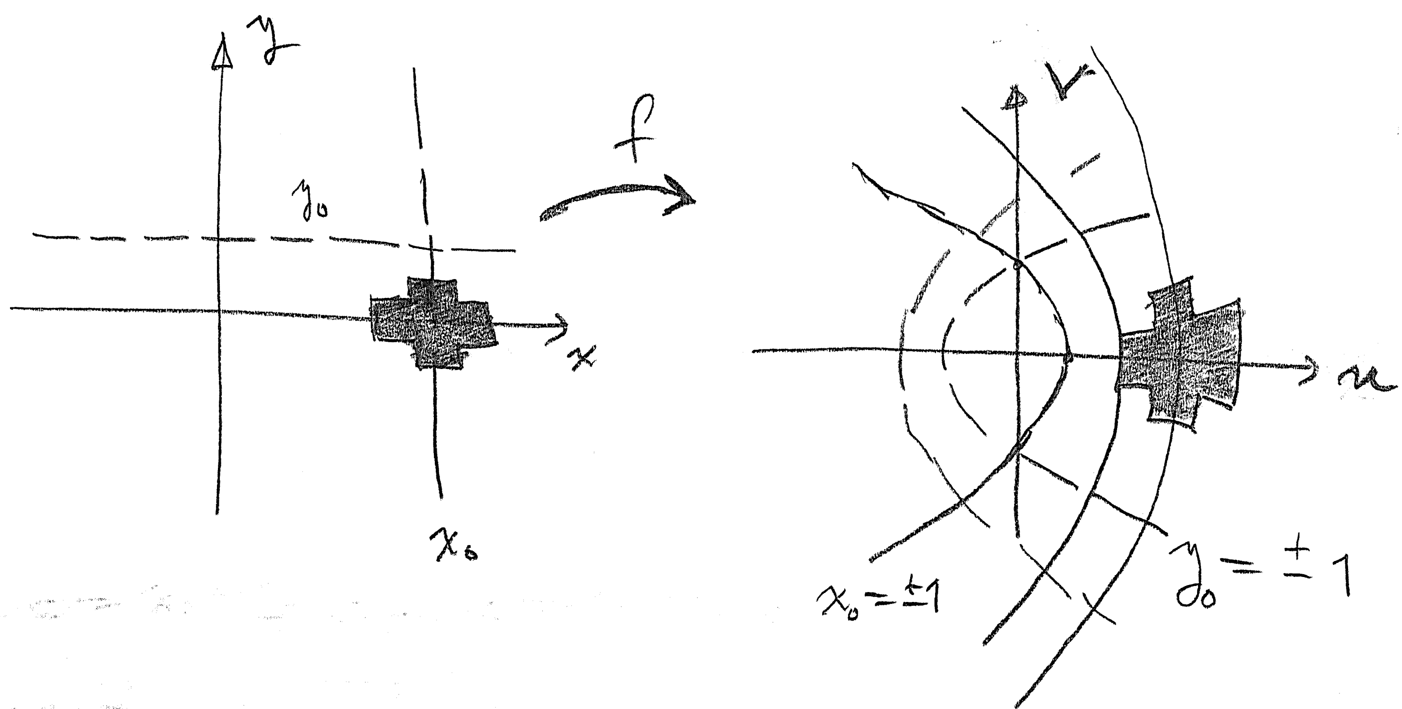
Para x_0, $z = x_0 + iy$ entonces

$$\cos(z) = \alpha \boxed{\cosh y} - i\beta \boxed{\operatorname{senh} y}$$

Sin embargo, $\left(\frac{u}{\cos x_0}\right)^2 - \left(\frac{v}{\operatorname{sen} x_0}\right)^2 = 1$ hipérbola

$f = u + iv \qquad u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad v(x,y) = 2xy$

para $y \in \mathbb{R}$ fijo. $(y \neq 0)$



observar $\quad y_0 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{v}{2y} = x \Rightarrow u = \dfrac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$

$\Rightarrow \boxed{4y_0^2\, u = v^2 - 4y_0^4}$

parábola abierta a la derecha

Teorema $f: D \longrightarrow D'$ $\quad D, D' \subseteq \mathbb{C}$ abiertos

es conforme ssi es holomorfa y f' es holomorfa distinta de cero en todo D.

Demostración:

$\Leftarrow)$ $$f'(a) z = J(f,a)(z) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} (z)$$

$\Rightarrow$ $\det J(f,a) = \alpha^2 + \beta^2 > 0$. (preserva orientación)

$Tx = z_0 \cdot x$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}^*$ $\left(\begin{array}{c} \text{de hecho} \\ f'(a) = z_0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow$ $|z_0 \cdot x| \, |z_0 \cdot y| \langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \langle Tx, Ty \rangle$

Geometría de aplicaciones conformes

$f(z) = z^2$ holomorfa en todo $\mathbb{C}$.