

Variable Compleja 1: 3 de abril

Clase pasada: Definición de integral de línea.

&  
Hoy

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continua

es integrable si  $\operatorname{Re}(f)$  &  $\operatorname{Im}(f)$  son  
integrables. Más aún,

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b \operatorname{Re}(f) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) dx$$

Propiedades 1)  $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$  suma

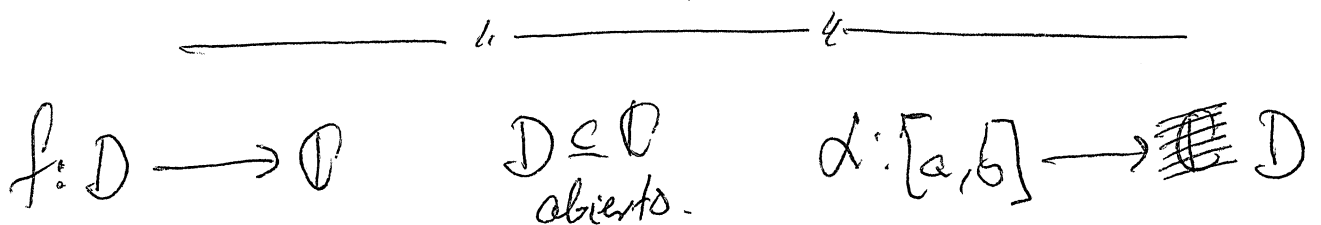
$$\int a f = a \int f$$

2) si  $f$  es continua con primitiva  $F$  (2)  
 $(F' = f)$

entonces  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

3)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)C$  si  $|f(x)| \leq C$

Def. -  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continua. A la imagen le llamamos curva. Una curva es ~~es~~ suave si es tiene derivada continua.



Def.

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\alpha} f(\gamma) d\gamma$$

Curva suave

a esta integral le llamamos integral de línea de  $f$  a lo largo de  $\alpha$ . (3)

Observar:  $\text{longitud}(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt$

Propiedades: 1)  $\int_{\alpha} f$  es  $\mathbb{C}$ -lineal en  $f$ .

2)  $\left| \int_{\alpha} f \right| \leq \int_{\alpha} |f| \leq C \cdot \text{longitud}(\alpha)$  si  $|f(\gamma)| \leq C$   
 $\forall \gamma \in \text{Im}(\alpha)$



$$f: D \rightarrow \mathbb{C}$$

$D \subseteq \mathbb{C}$   
abierto

continua con  
primitiva  $F$

entonces

$$\int_{\alpha} f(\gamma) d\gamma = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))$$

Teorema:

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}$$

$D \subseteq \mathbb{C}$   
abierto

(4)  
contiene  
una primitiva  
 $F$

entonces

$$\int_{\alpha} f(\gamma) d\gamma = 0 \quad \text{para cualquier}$$

curva cerrada  $\alpha \subseteq D$ .  
 $\alpha(a) = \alpha(b)$

Eg:

$$\alpha(t) = r e^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \quad r > 0$$

$$\int_{\alpha} z^m dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases}$$

COROLARIO:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

no tiene primitiva  
en  $\mathbb{C}^*$

(¿y el logaritmo?)

$$g(z) = \log(z)$$