Variable Compleja 1: 3 de abril

Clase pasada: Definición de integral de línea.

&

Hoy

$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{continua}$$

es integrable si $Re(f)$ & $Im(f)$ son integrables. Más aún,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b Re(f)\,dx + i\int_a^b Im(f)\,dx$$

Propiedades 1) $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ suma

$$\int \lambda f = \lambda \int f$$

2) si f es continua con primitiva F $(F' = f)$

entonces $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

3) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a)C \quad \text{si } |f(x)| \leq C$$

Def.- $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continua. A la imagen le llamamos curva. Una curva es ~~lis~~ suave si es tiene derivada continua.

$f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad D \subseteq \mathbb{C}$ abierto. $\quad \alpha : [a,b] \longrightarrow D$ curva suave

Def.: $$\boxed{\int_a^b f(\alpha(t))\,\alpha'(t)\,dt = \int_\alpha f(z)\,dz = \int_\alpha f(y)\,dy}$$

a esta integral le llamamos integral de línea de f a lo largo de α.

Observar: $$\text{longitud}(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt$$

<u>Propiedades</u>: 1) $\int_\alpha f$ es $\mathbb{C}$-lineal en f.

2) $$\left|\int_\alpha f\right| \le \int_\alpha |f| \le C\cdot\text{longitud}(\alpha) \quad \text{si } |f(z)| \le C \quad \forall z \in \text{Im}(\alpha)$$

$\boxed{3}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad D \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{C}$ continua con primitiva F

entonces
$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))$$

<u>Teorema</u>: $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad D \subseteq \mathbb{C}$ abierto, continua con primitiva F

entonces

$$\int_\alpha f(\gamma)\, d\gamma = 0$$

para cualquier curva <u>cerrada</u> $\alpha \subseteq D$.

$$\underbrace{\text{cerrada}}_{\alpha(a)=\alpha(b)}$$

Eg.: $\alpha(t) = re^{it}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad r > 0$.

$$\int_\alpha \gamma^n \, d\gamma = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

<u>COROLARIO</u>: $f(z) = \frac{1}{z}$ no tiene primitiva en $\mathbb{C}^*$

(¿y el logaritmo?)

$g(z) = \log(z)$