UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

2^{do} examen parcial de teoría de números

7 de noviembre 2018

Una condición necesaria para aprobar este examen es presentar la solución completa de al menos dos problemas. 70 puntos son un puntaje aprobatorio.

25 PUNTOS

Calcualar las raíces del siguiente polinomio de grado 16 y coeficientes 1,

$$\Phi_{17}(x) = x^{16} + x^{15} + \cdots + x + 1.$$

Teorema. *Si $p \in \mathbb{Z}$ es un primo impar y Φ_p denota el polinomio ciclotómico, entonces el grupo de Galois*

$$\mathrm{Gal}(\Phi_p) \cong (\mathbb{Z}/p)^*,$$

es cíclico de orden $p-1$.

SUMAS DE GAUSS

Si ζ denota una p-ésima raíz primitiva de la unidad y además denotamos la suma de Gauss

$$g = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) \zeta^i,$$

donde $\left(\frac{i}{p}\right)$ denota el símbolo de Legendre, entonces calcular g^2.

Ejercicio 3

Consideremos $\zeta_5 = e^{2\pi/5}$ raíz de $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomio ciclotómico. Mostrar que Φ_5 es soluble por radicales. Es decir,

$$\begin{aligned} \zeta_5 &= \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5) \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Argumentar a favor o en contra

Existe un polinomio ciclotómico que tiene raíces radicales y también no radicales.