Álgebra Moderna III : 3 octubre

Repaso: El tema central de la clase ha sido estudiar "la naturaleza" de los números algebraicos: raíces de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

y

su relación con geometría de regla y compás (#'s construcibles).

Ahora sabemos:

* Las raíces de polinomios en $\mathbb{Q}[x]$ se organizan en campos

i.e. $\beta, \alpha \in \left\{ \begin{array}{l} \text{Todas las} \\ \text{raíces de} \\ f(x) \end{array} \right\} = E =$ Campo de descomposición de f.

(expresiones algebraicas)

$\Rightarrow \alpha^{-1} \in E \quad \& \quad \alpha \cdot \beta \in E$

Más aún, si E es el conjunto más pequeño de expresiones polinomiales de raíces de f, entonces

* E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ de dimensión finita.

* E es único hasta por isomorfismo.

↳ ¿Cuántos isomorfismos existen?

* Existen un número finito de isomorfismos $E \xrightarrow{\varphi} E$ con $\varphi_{|\mathbb{Q}} = Id$.

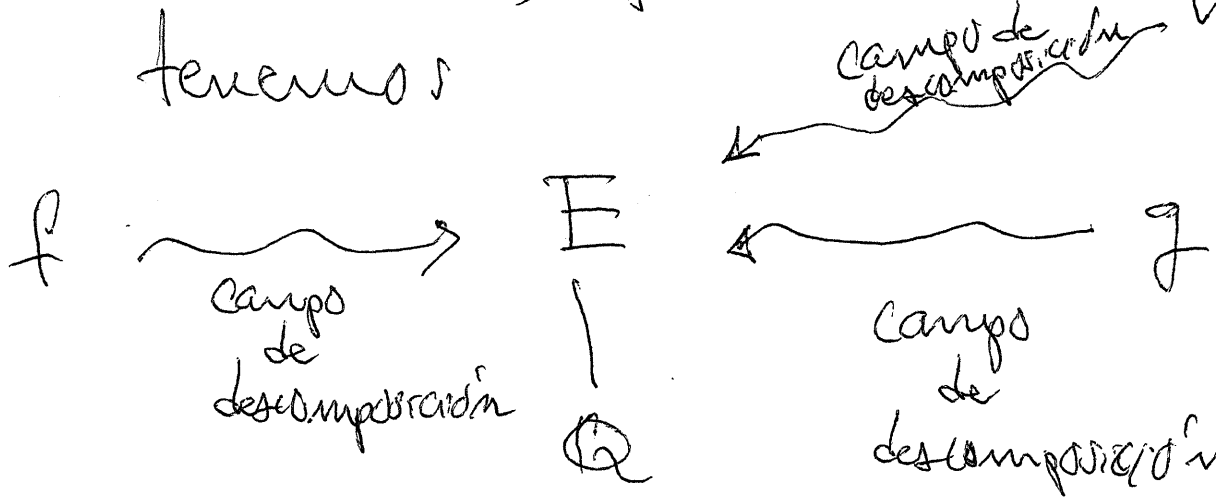
↳ estos isomorfismos de E sobre $\mathbb{Q}$ tienen una propiedad notable: permutan las raíces de f y las de cualquier otro $g \in \mathbb{Q}[x]$!

Para que esto tenga sentido

↳ Si $\alpha \in E$ es raíz de g ¿será cierto que cualquier otra raíz de g está en E?

Sí, E es <u>normal</u>.

Por lo tanto, pictóricamente tenemos:



El grupo $Gal = Aut\left(\begin{matrix} E \\ | \\ \mathbb{Q} \end{matrix}\right)$

permuta las raíces de

f, g y h ! y cualquier

otro polinomio que tenga una raíz en E.

↳ dado un $f \in \mathbb{Q}[x]$, $Gal(f) = Gal\left(\begin{matrix}\text{campo de descomp. de } f \\ \text{sobre } \mathbb{Q}\end{matrix}\right)$ permuta sus raíces.

¿Cómo?

depende de qué campo sea E, y de qué "tan cerca" estén las raíces de f.

i.e. si las raíces de f generan un campo E de dimensión grande/a entonces habrá muchas permutaciones permitidas. (i.e. $Gal(f)$ será grande)

i.e. entre más independientes (algebraicamente) sean las raíces de f, su grupo de Galois será más grande.

para entender

¿Cómo permuta $Gal(f)$ las raíces de f?

↳ estudiaremos la representación

$$\rho : Gal(f) \longrightarrow End(E)$$
$$\tau \longmapsto T_\tau : E \xrightarrow{\cong} E \quad (\mathbb{Q})$$

en esta dirección:

Observación reveladora: