CLASIFICAIÓN BIRRACIONAL DE SUPERFICIES ALGEBRAICAS

Esta es la bitácora de ejercicios del curso *Clasificación de superficies algebraicas* impartido en el Instituto de matemáticas de la UNAM en la ciudad de Oaxaca.

Esta bitácora contiene ejercicio distribuidos en bloques. Todos los temas referentes a los ejercicios se abordaron en clase.

Primer bloque: 7 ejercicios
entrega 28 de febrero 2019

Ejercicios.

1. Considere el morfismo $\phi : \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$ definido como sigue:
$$[s : t] \mapsto [s^3 : s^2 t : t^2 s : t^3].$$
Describa la imagen de ϕ, que denotaremos por C, como los ceros de tres polinomios cuadráticos Q_1, Q_2, Q_3. Muestre que no existe un plano $H \subset \mathbb{P}^3_k$ que contenga a C.

2. Sean C y los tres polinomios cuadráticos Q_1, Q_2, Q_3 definidos como en el ejercicio (2) de este bloque. Muestre que olvidando un polinomio Q_i, $1 \leq i \leq 3$, la intersección $Q_j \cap Q_r$ es igual a $C \cup L$, donde L es una línea.

3. Sea $\lambda \in \mathbb{P}^1$, C y Q_2, Q_3 como en el ejercicio anterior. Consideremos
$$Q_\lambda = \lambda_0 Q_2 + \lambda_1 Q_3.$$
Mostrar que la intersección $Q_1 \cap Q_\lambda = C \cup L_\lambda$, donde L_λ es una línea. ¿Qué superficie barre dicha línea L_λ? *i.e.* ¿Qué superficie es $S = \cup_{\lambda \in \mathbb{P}^1} L_\lambda$?

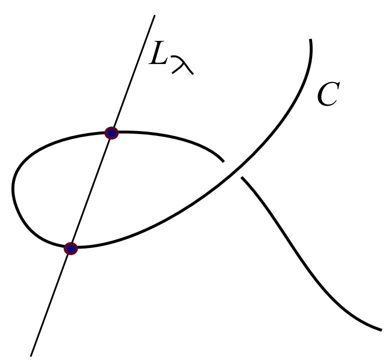

Figura 1. Curvas $C \cup L_\lambda$.

4. Considere el siguiente morfismo $f : \mathbb{P}^2_k \to \mathbb{P}^5_k$ definido por
$$[x : y : z] \mapsto [x^2 : yx : y^2 : yz : z^2 : xz].$$
Exhiba 6 polinomios cuadráticos distintos cuyos ceros contengan la imagen de f.

5. En el plano $\mathbb{P}^2$ consideremos los 6 puntos
$$\Gamma = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [0 : 1 : 1], [1 : 0 : 1], [1 : 1 : 0]\}.$$
Calcular la ecuación de la explosión
$$\mathrm{Bl}_\Gamma \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3,$$
donde el encaje está dado por las curvas cúbicas que pasan por Γ.
Pista: $y^2(x - z + w) - xzw$.

6. Considérese la explosión encajada $S = \mathrm{Bl}_\Gamma \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$ del ejercicio anterior. Mostrar que S tiene tres puntos singulares, encontrarlos. (¿Se vale usar la ecuación si no la calcularon?)

7. Considerar las curvas cúbicas en $\mathbb{P}^2$ que pasan por los puntos $[1:1:1], [0:1:0]$ y que además son tangentes a las líneas $z = 0$ y $y = 0$ en los puntos $[1:0:0], [0:0:1]$, respectivamente. Este sistema líneal para manda $\mathbb{P}^2$ a ¿qué proyectivo? ¿qué euación tiene? ¿es suave?
Pista: parte de la ecuación se ve como $y^2(y-w)^a + xzw....$

Segundo bloque
entrega 6 de septiembre 2019

Ejercicio 1. Considerar $f : S \to C$ un haz de cónicas sobre un campo algebraicamente cerrado.

1. Mostrar que cualquier fibra es una cónica suave o un par de líneas que se intersectan (no una linea doble) y que componentes irreducibles de las fibras singulares son curvas -1.
2. S se puede obtener de un $\mathbb{P}^1$-haz $P \to C$ mediante explosiones en un punto en un número finito de fibras.
3. Mostrar que $K^2 \leq 8(1-g(C))$ donde $g(C)$ denota el género de C. La igualdad se obtiene si y sólo si todas las fibras son suaves.
4. Mostrar que $f_*(\mathcal{O}(-K_S)) = E$ es un haz vectorial de rango 3 sobre C y que existe un encaje
$$S \to \mathbb{P}(\mathbb{E}).$$

Ejercicio 2. Considerar una curva efectiva C disconexa en una superficie suave. Mostar que C tiene número de intersección cero con todas sus componentes irreducibles ó C tiene número de intersección negativo con al menos una de sus componentes irreducibles.

Tercer bloque
entrega 20 de septiembre 2019

Ejercicio 1. ($k = \mathbb{C}$). Considerar una superficie suave S y una curva $C \subset S$, tal que $\dim |\mathcal{O}_S(C)| > 0$. Si S se asume regular (*i.e.*, $h^1(\mathcal{O}) = 0$), y $C.K_S < 0$, entonces S es racional. (*Pista: criterio de racionalidad de Castelnuovo.*)

Ejercicio 2. Considerar una curva C reducida geométricamente irreducible conexa de género aritmético cero en superficie suave S_k, definida sobre un campo perfecto k. Probar que $C_{\overline{k}}$ es irreducible o tiene dos componentes que son conjugadas.

Cuarto bloque
entrega 19 de noviembre 2019

Ejercicio 1. Considerar la envolvente tangente S de una curva $C \subset \mathbb{P}^3$ de grado d. ¿Qué grado tienen la superficie S? ¿es suave?

Ejercicio 2. ¿Existen superficies regladas suaves de todos los grados en $\mathbb{P}^3$ o $\mathbb{P}^4$? En ambos casos, ¿está acotada la irregularidad? [1]

Ejercicio 3. Si consideramos $C \subset \mathbb{P}^3$ una curva suave de grado 5 y género 2, tenemos una superficie reglada inducida $S = \mathbb{P}(N_C)$; la proyectivización del haz normal de C. ¿En qué espacio proyectivo se puede encajar S? ¿Con qué grado? ¿qué invariantes numéricos tiene S?

Ejercicio 4. Consideramos $C \subset \mathbb{P}^3$ la cúbica racional normal y L una línea disjunta a ella. Las cuerdas de C incidentes a L forman una superficie reglada S ¿qué grado tiene? ¿qué invariantes numéricos tiene S?

Ejercicio 5. Consideramos $S \subset \mathbb{P}^3$ superficie cúbica que contiene dos líneas dobles no complanares. Mostrar que la normalización de S es una superficie geométricamente reglada sobre una curva elíptica.

[1] Las superficies regladas de grado 4 en $\mathbb{P}^3$ fueron clasificadas completamente por Cremona: *Memorie dell' Accademia di Bologna*, 1868.