UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

Álgebra moderna II: tarea 11

Fecha de entrega: 13 de junio, 2017

REPRESENTABILIDAD: RESUMEN

Si $n, p \in \mathbb{Z}$ con $(n,p) = 1$, entonces sabemos que $(-n/p) = 1$ si y sólo si p es representable por una forma primitiva de discriminante $-4n$. Sabemos también que formas equivalentes representan el mismo conjunto de números.
Por lo tanto, si $D < 0$ y $h_D = 1$, entonces p es representable por la única forma reducida de discriminante $D = -4n$ si y sólo si $(-n/p) = 1$.

Asumiendo reciprocidad cuadrática sabemos $p \equiv 1,3,7,9 \mod 20$ si y sólo si $(-5/p) = 1$. Exhibir ejemplos de primos p que no se pueden escribir como $x^2 + 5y^2$ y además que satisfacen $(-5/p) = 1$. ¿ Contradice esto los dos párrafos de arriba?

EJERCICIO 2

Intentar caracterizar[1] los primos $(-3/p) = 1$. Concluir que $p = x^2 + 3y^2$ si y sólo si $p =$?

EJERCICIO 3

Intentar caracterizar los primos que pueden escribirse como $p = x^2 + 7y^2$.
Pista: $p \equiv \ldots ? \mod 28$.

EJERCICIO 4

Considerar los anillos[2] R_D tal que $h_D = 1$. Listar la única forma reducida para todos estos casos.

[1] Puede usarse reciprocidad cuadrática.
[2] Sólo existen 9.

Ejercicio 5

Mostrar que el número de clase h_D del anillo de enteros algebraicos $R_D \subset \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ es $h_D > 1$ si $d = 5, 6, 10$.

Ejercicio 6

Mostrar que el conjunto de clases de equivalencia de módulos completos en $M \subset \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$, con $D < 0$, y el conjunto de clases de formas definidas positivas propiamente equivalentes son biyectivos.