UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

Álgebra moderna II: tarea 6

Fecha de entrega: 7 de abril, 2017

EJERCICIO 1

Teorema (Gauss). *Sea $n \in \mathbb{Z}$ un entero. Si n se puede expresar como suma de dos cuadrados, $i.e.$, $n = x^2 + y^2$ para algunos $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces los primos $p|n$ congruentes con 3 módulo 4 tienen potencia par en la factorización en enteros primos de n. [1, página 148].*

EJERCICIO 2

Sea p un entero primo tal que $p \equiv 3 \mod 4$. Entonces $x^2 + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

EJERCICIO 3

Sea $I \subset \mathbb{Z}[i]$ un ideal en anillo de los enteros gausianos. Muestre que el cociente $\mathbb{Z}[i]/I$ es finito.

EJERCICIO 4

Muestre que $\mathbb{Z}[i]$, el anillo de los enteros gausianos es un dominio euclidiano con respecto a la función $\delta(a + bi) = a^2 + b^2$.

EJERCICIO 5

Clasificar los enteros primos p tal que la ecuación $x^2 + 2y^2 = p$ tenga solución en $\mathbb{Z}$.

Ejercicio 6

¿Es el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dominio euclidiano? ¿dominio de ideales principales? ¿dominio de factorización única?

References

[1] C.F. Gauss: Disquisitiones Arithmeticae. English edition. Springer-Verlag 1986.