Universidad Autónoma "Benito Juárez" de Oaxaca

Álgebra moderna II: tarea 8

Fecha de entrega: 28 de abril, 2017

Ejercicio 1

¿Es $\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ un entero algebraico?

Ejercicio 2

Mostrar que $\mathbb{Z}[\alpha]$, donde $\alpha^2+\alpha+1=0$, es dominio euclidiano con la norma

$$\delta(a+b\alpha)=(a+b\alpha)(a+b\alpha^2)=a^2-ab+b^2.$$

Ejercicio 3

Sea $\mathbb{Z}[\alpha]$ como en el ejercicio anterior. Mostrar que

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]\subset\mathbb{Z}[\alpha],$$

y que los elementos irreducibles, distintos del 2, de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ permanecen irreducibles en $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Ejercicio 4

Muestre que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es euclidiano. Más aún, mostrar que los elementos

$$(1+\sqrt{2})^n$$

con $n\in\mathbb{Z}$ son unidades. ¿Son todas?

EJERCICIO 5

Sea un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ mónico e irreducible. Entonces, $\alpha \in \mathbb{C}$ es un entero algebraico si o sólo si f tiene coeficientes en $\mathbb{Z}$. *Pista: usar el Lema de Gauss sobre polinomios y su contenido.*