UNIVERSIDAD AUTÓNOMA “BENITO JUÁREZ” DE OAXACA

Álgebra moderna II: tarea 9

Fecha de entrega: 5 de mayo, 2017

EJERCICIO 1

Si $d \equiv 1 \mod 4$, entonces

$$\mathbb{N}(a + b\sqrt{d}) = a^2 - db^2$$

es un número entero.

EJERCICIO 2

Sea R el anillo de enteros algebraicos del campo $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$,

$$R_D = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{D+\sqrt{D}}{2}\right).$$

Calcular las unidades de R_D, con $D < 0$.

EJERCICIO 3

Sea R el anillo de enteros algebraicos del campo $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$,

$$R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Escribamos $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la razón áurea. ¿Es α^n, con $n \in \mathbb{Z}$, una unidad de R?

APROXIMACIÓN DIOFANTINA

Sea $\alpha \in R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ como en el ejercicio anterior. Si escribimos $\alpha^n = (a_n + b_n\sqrt{5})$, verificar que el cociente de racionales, a_n / b_n aproxima a un número irracional, a saber

$$\frac{a_n}{b_n} \approx \sqrt{5}.$$

EJERCICIO 5

Sea $R_D \subset \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, con $d \equiv 3 \mod 4$ y $d \neq -1$, el anillo de enteros algebraicos. Mostrar que 2 es un elemento irreducible, pero no es un elemento primo.

EJERCICIO 6

Sea $R \subset \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ el anillo de enteros algebraicos. Supongamos que R es un dominio de factorización única. Mostrar que si $a \in R$ es un elemento irreducible entonces es un elemento primo.