

Examen final de teoría de números

19 de diciembre 2018

Una condición necesaria para aprobar este examen es presentar la solución completa de al menos dos problemas. 70 puntos son un puntaje aprobatorio.

Teorema (Gauss). *El polígono regular de 17 lados es constructible con regla y compás.*¹

SUMAS DE GAUSS

Considerar $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ el campo polinomio ciclotómico con $p \in \mathbb{Z}$ primo impar. Mostrar que existe un subcampo

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_p),$$

para un entero d , ¿qué entero d ?

25 PUNTOS

Mostrar que el número de clase h_{17} del anillo de enteros algebraicos

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{-17}],$$

es $h_{17} > 1$.

¹Estrategia: mostrar que $\Phi_{17}(x) = x^{16} + x^{15} + x^{14} + \dots + x + 1$ se resuelve con radicales cuadráticos.

25 PUNTOS

Caracterizar los números primos que se pueden escribir como

$$p = x^2 + 5y^2, \quad \text{ó} \quad p = 2x^2 + 2xy + 3y^2.$$

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Existe un polinomio ciclotómico que tiene raíces radicales y también no radicales.