

Teoría (algebraica) de números, 24 agosto 2018

Homomorfismo de anillos

$$f: R \rightarrow R'$$

[R conmutativo, en adelante]

1) homomorfismo de grupo $(+, 0)$

$$2) f(1_R) = 1_{R'} \quad \& \quad f(ab) = f(a)f(b)$$

$$\text{Ker}(f) = \{ a \in R \mid f(a) = 0 \}$$

↳ Propiedades:

$$\boxed{f(a)f(b) = 0}$$

1) subgrupo de R $(+, 0)$ \Leftrightarrow

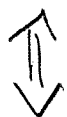
2) $a, b \in \text{Ker}(f) \Rightarrow a \cdot b \in \text{Ker}(f)$

(2)

$\text{Ker}(f)$ tiene una propiedad más:

si $a \in \text{ker}(f)$ y $b \in R \Rightarrow$

$$a \cdot b \in \text{ker}(f)$$



$$f(a) \cdot f(b) = 0 \cdot f(b) = 0$$

Un subconjunto $I \subseteq R$ que es un subgrupo $(+, 0)$ y cerrado bajo la multiplicación de cualquier elemento de R , le llamamos Ideal.

EJEMPLOS: * Cualquier kernel de un homomorfismo

(3)

Propo Cualquier ideal $I \subseteq R$ es
el kernel de algún homomorfismo

$$f: R \longrightarrow R'$$

Demostación: Sea $I \subseteq R$ ideal.

$$\pi: R \longrightarrow R/I := \{a+I \mid a \in R\}$$

$$\ker(\pi) = I = \{j \in R\}$$



EJEMPLO: Todos los ideales $I \subseteq \mathbb{Z}$ son
de la forma $I = \langle n \rangle$ con $n \in \mathbb{Z}$

↑
(principales)

demostración:

$$\exists j \in \mathbb{Z}$$

(A)

Pregunta: $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
 $i^2 = -1$

Sea $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ ideal,

¿es I principal?

↳ ¿Existen anillos con
ideales no principales?

¿es $(\mathbb{Z}/p)^{\times}$ campo? EJER: