Teoría (algebraica) de números, 27 agosto 2018

Homomorfismo de anillos

$$f : R \longrightarrow R'$$

[R commutativo, en adelante]

1) homomorfismo de grupo $(+, 0)$

2) $f(1_R) = 1_{R'}$ & $f(ab) = f(a)f(b)$

$$\ker(f) = \{ a \in R \mid f(a) = 0 \}$$

↳ Propiedades:

$\boxed{f(a)f(b) = 0}$

1) subgrupo de R $(+, 0)$

2) $a, b \in \ker(f) \Rightarrow a \cdot b \in \ker(f)$

Ker(f) tiene una propiedad más:

si $a \in \text{Ker}(f)$ y $b \in R \Rightarrow$

$$a \cdot b \in \text{Ker}(f)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(a) f(b) = 0 \cdot f(b) = 0$$

Un subconjunto $I \leq R$ que es un subgrupo $(+, 0)$ & cerrado bajo la multiplicación de cualquier elemento de R, le llamamos Ideal.

EJEMPLOS: * Cualquier Kernel de un homomorfismo

<u>Propo</u> Cualquier ideal $I \leq R$ es el kernel de algún homomorfismo

$$f: R \longrightarrow R'$$

<u>Demostración</u>: Sea $I \leq R$ ideal.

$$\pi: R \longrightarrow R/I := \{a+I \mid a \in R\}$$

$$\ker(\pi) = I \quad = \text{EJER} =$$

$\blacksquare$

<u>EJEMPLO</u>: Todos los ideales $I \leq \mathbb{Z}$ son de la forma $I = \langle n \rangle$ con $n \in \mathbb{Z}$

(principales)

<u>demostración</u>: EJER.

(4)

Pregunta: $\mathbb{Z}[i] = \left\{ a+bi \;\middle|\; \begin{array}{l} a,b \in \mathbb{Z} \\ i^2 = -1 \end{array} \right\}$

Sea $I \subseteq \mathbb{Z}[i]$ ideal,

¿es I principal?

↳ ¿Existen anillos con ideales no principales?

¿es $\left(\mathbb{Z}/p\right)^{\times}$ campo? EJER: