UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

Examen parcial de Teoría de números

1 de octubre 2018

Una condición necesaria para aprobar este examen es presentar la solución completa de al menos dos problemas. 70 puntos son un puntaje aprobatorio.

Teorema (Fermat)**.** *Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo ($p \neq 2$). Entonces, $p = x^2 + y^2$ para algunos $x, y \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $p \equiv 1 \mod 4$.*

25 PUNTOS

Teorema (Galois)**.** *Sea F un campo finito. Entonces la cardinalidad de F es igual a $|F| = p^k$ para algún primo $p \in \mathbb{Z}$ y algún entero $k > 0$.*

25 PUNTOS

Demuestre que existe un campo de cardinalidad p^2 para cualquier $p \in \mathbb{Z}$ número primo.

25 PUNTOS

Sea $\mathbb{Z}[i]$ el anillo de los enteros gausianos. Demuestre que el cociente $\mathbb{Z}[i]/(2+i) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

25 PUNTOS

Sea F un campo. El anillo $R = F[x]/(f)$ es un campo si y solo si $f(x)$ es irreducible sobre F.