UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

# Teoría de números: tarea 6

## Fecha de entrega: 26 de octubre 2018

### EJERCICIO 1

Consideremos dos primos impares $p, q \in \mathbb{Z}$. Si escribimos $p^* = (-1)^{(\frac{p-1}{2})} p$, entonces mostrar que el teorema de reciprocidad cuadrática es equivalente a

$$\left(\frac{p^*}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right).$$

### SUMAS DE GAUSS

Consideremos $\zeta$ raíz del polinomio $\Phi_p(x)$, para $p = 5, 7$. Si escribimos la suma

$$\tau = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/p)^*} \left(\frac{a}{p}\right) \zeta^a,$$

Calcular el entero $\tau^2 \in \mathbb{Z}$. ¿Puedes conjeturar el valor de $\tau^2$ para otros primos?

### EJERCICIO 3

Consideremos $\zeta_5 = e^{2\pi i/5}$ raíz primitiva de 1. Si escribimos

$$\alpha = \zeta + \zeta^{-1},$$

entonces exhibir un polinomio cuadrático $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $P(\alpha) = 0$.

### Ejercicio 4

Consideremos $\zeta_5$ y $\alpha$ como en el ejercicio anterior. Exhibir un polinomio cuadrático $F(x)$ con coeficientes en $\mathbb{Q}(\alpha)$ tal que $F(\zeta_5) = 0$.

### Ejercicio 5

Usando el ejercicio anterior escribir explícitamente las 4 soluciones del polinomio

$$\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

### Ejercicio 6

Considerar $\zeta_7$ raíz primitiva de la unidad y los automorfismos $T_k \in \mathrm{Gal}(\Phi_7)$, donde $k$ es residuo cuadrático módulo 7. Encontrar $\tau \in \mathbb{Q}(\zeta_7)$ tal que $T_k(\tau) = \tau$. Si reemplazamos 7 por otro primo, ¿Existe dicho $\tau$?

### Argumentar a favor o en contra[1]

Todo campo ciclotómico tiene un subcampo de la forma $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, para algún $d \in \mathbb{Z}$.

[1] Pista: ¿Notas una relación con residuos cuadráticos?