UNIVERSIDAD AUTÓNOMA "BENITO JUÁREZ" DE OAXACA

# Teoría de números: tarea 7

Fecha de entrega: 5 de noviembre 2018

### POLINOMIO DE GRADO 6 SOLUBLE POR RADICALES

Consideremos $\zeta_7$ raíz del polinomio $\Phi_7(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Dividiendo $\Phi_7$ por $x^3$, tenemos

$$x^3 + x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}.$$

Usar esto para demostrar que $\alpha = \zeta_7 + \zeta_7^{-1} = 2\cos(2\pi/7)$ satisface la ecuación

$$y^3 + y^2 - 2y - 1.$$

Concluir que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha) = 3$.
Aplicar la formular de Cardano para $\alpha$ y deducir que

$$\alpha = \frac{1}{3}\left(-1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 + 3i\sqrt{3})} + \sqrt[3]{\frac{7}{2}(1 - 3i\sqrt{3})}\right).$$

### CONTINUACIÓN DEL EJERCICIO ANTERIOR

Mostrar que $\zeta_7$ es raíz de $x^2 - \alpha x + 1 \in \mathbb{Q}(\alpha)[x]$ y deducir que $\zeta_7 = 1/2(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4})$. Usando la expresión de $\alpha$ del ejercicio anterior deducir que $\zeta_7$ se puede escribir con radicales como [1]

[1] $\cos(2\pi/7)$ es aproximadamente 0.623489.

$$\begin{aligned}\zeta_7 &= \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)\\ &= \frac{1}{6}\left(-1+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3i\sqrt{3})}+\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1-3i\sqrt{3})}\right)+\frac{i}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1+3i\sqrt{3})}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(1-3i\sqrt{3})}\right)^2}\end{aligned}$$

Esto exhibe una solución, usando radicales, del polinomio $\Phi_7(x) = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$.

### Poligono regular de 17 lados

Mostrar que

$$\cos(2\pi/17) = -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Por lo tanto, observar que $\zeta_{17}$ se puede expresar usando sólo radicales cuadráticos.

### Ejercicio 4

Considere $\zeta_{11}$ raíz del polinomio ciclotómico $\Phi_{11}(x) = x^{10}+x^9+\cdots+x+1$. Es posible escribir $\zeta_{11}$ usando radicales si y sólo si la ecuación

$$t^5 + t^4 - 4t^3 - 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

es soluble por radicales. Esta última ecuación ¿es soluble por radicales?

### Argumente a favor o en contra

Considere $\zeta_{23}$ raíz del polinomio ciclotómico $\Phi_{23}(x) = x^{22}+x^{21}+\cdots+x+1$. Es posible escribir $\zeta_{23}$ usando radicales si y sólo si la ecuación

$$t^{11} + t^{10} - 10t^9 - 9t^8 + 36t^7 + 28t^6 - 56t^5 - 35t^4 + 35t^3 + 15t^2 - 6t - 1 = 0$$

es soluble por radicales. Esta última ecuación ¿es soluble por radicales?

### Argumente a favor o en contra

Todo los polinomios ciclotómicos $\Phi_p$, con $p$ primo, son solubles por radicales.