

Teoría de números: tarea 8

Fecha de entrega: 28 de noviembre 2018

EJERCICIO 1

Demostrar los criterios de divisibilidad por 3, 7, 11, 13.

EJERCICIO 2¹

Mostrar que un primo $p \in \mathbb{Z}$ se puede escribir de forma única como

$$p = x^2 + 2y^2,$$

donde $x, y \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$.

EJERCICIO 3

Considerar una matriz 2×2 con entradas en enteras M tal que

$$M^2 = -I,$$

donde I denota la matriz identidad. ¿Cuántas matrices existen con esta propiedad?

¹Disquisitiones Arithmeticae, p. 150.

EJERCICIO 4

Considerar una matriz 2×2 con entradas en enteras M tal que

$$M^2 = -5I,$$

donde I denota la matriz identidad. ¿Cuántas matrices existen con esta propiedad?

EJERCICIO 5

Definamos el discriminante de la forma cuadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

como $D := b^2 - 4ac$. ¿Cuántas formas cuadráticas existen de discriminante $D = -20$?

ARGUMENTE A FAVOR O EN CONTRA

Si $d \equiv 1 \pmod{4}$, entonces el ideal (p) es primo en $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ si y sólo si el polinomio $x^2 - x + \frac{1-d}{4}$ es irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$.

ARGUMENTE A FAVOR O EN CONTRA

Denotemos el campo $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-19}]$. ¿Es el anillo \mathcal{O}_K dominio euclidiano?