

# Álgebra Moderna III: 21 NOV

Clase pasada: Campos conjugados y subgrupos normales

Hoy: <sup>sub</sup> Grupos normales & sus campos fijos

---

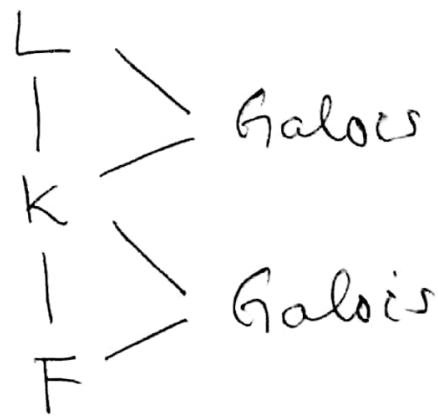
Recordar  $H \triangleleft G$  subgrupo normal  $\Rightarrow$   
 $G/H$  es grupo.

si tenemos  $G = \text{Gal}\left(\frac{L}{F}\right)$  y  $H \triangleleft G$   
entonces  $F < L_H \leq L$  son extensiones

tal que  $H = \text{Gal}(L \setminus L_H)$

¿Cuál es  $\text{Gal}(L_H \setminus F)$ ?  
en términos de  $G$  &  $H$

Teorema:



Entonces

$$\text{Gal}(L \setminus K) \triangleleft \text{Gal}(L \setminus F) \quad \text{y}$$

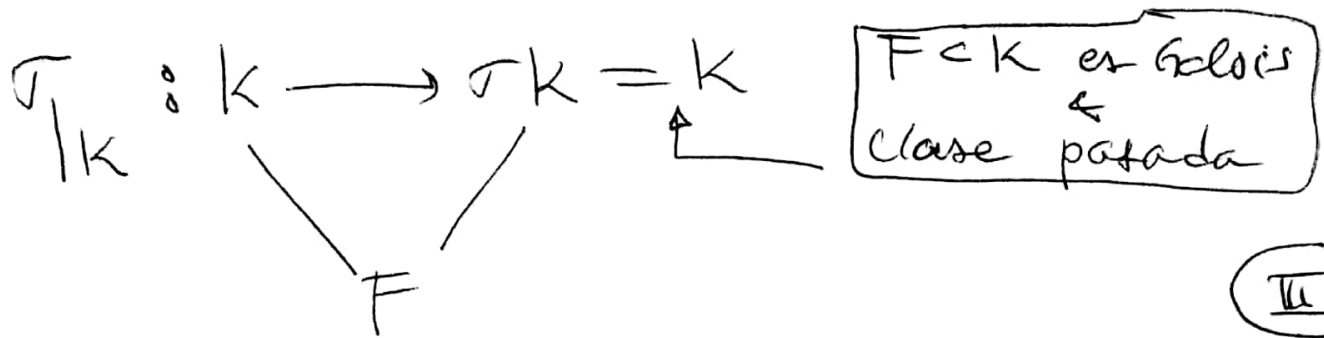
$$\frac{\text{Gal}(L \setminus F)}{\text{Gal}(L \setminus K)} \xrightarrow{\cong} \text{Gal}(K \setminus F)$$

Demostración: El teorema de la clase pasada nos dice que  $\text{Gal}(L \setminus K) \triangleleft \text{Gal}(L \setminus F)$ .

Nos resta relacionar

$$\frac{\text{Gal}(L \setminus F)}{\text{Gal}(L \setminus K)} \quad \text{y} \quad \text{Gal}(K \setminus F).$$

Tomemos  $\sigma \in \text{Gal}(L \setminus F)$  y consideremos



$\Rightarrow \sigma|_K \in \text{Gal}(K|F)$ . Por tanto

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi: \text{Gal}(L|F) & \longrightarrow & \text{Gal}(K|F) \\
 \sigma & \longmapsto & \sigma|_K
 \end{array}$$

Observar

$$\begin{aligned}
 \sigma \circ \tau|_K &= (\sigma \circ \tau)|_K = \sigma|_K \circ \tau|_K \\
 &= \sigma|_K \cdot \tau|_K
 \end{aligned}$$

Por tanto  $\Phi$  es un homomorfismo de grupos

$$\Rightarrow \text{Gal}(L|F) / \ker \Phi \cong \text{Im}(\Phi) \subseteq \text{Gal}(K|F)$$

$$\text{Ker } \bar{\Phi} = \left\{ \sigma \in \text{Gal}(L \setminus F) \mid \sigma|_K = \text{Id} \right\}$$

IV

$$= \text{Gal}(L \setminus K).$$

Por otro lado

$$|\text{Im}(\bar{\Phi})| = \frac{|\text{Gal}(E \setminus F)|}{|\text{Gal}(L \setminus K)|}$$

$L \subseteq F$   
 $K \subseteq E$   
 Son Galois

$$= \frac{[L:F]}{[L:K]} = [K:F]$$

$$= |\text{Gal}(K \setminus F)|$$

$$\Rightarrow \text{Im}(\bar{\Phi}) = \text{Gal}(K \setminus F)$$

$F \subseteq K$   
 es Galois



Ej:  $D_4 \cong \langle \sigma, \tau \rangle$        $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$        $\overline{\mathbb{Q}}$

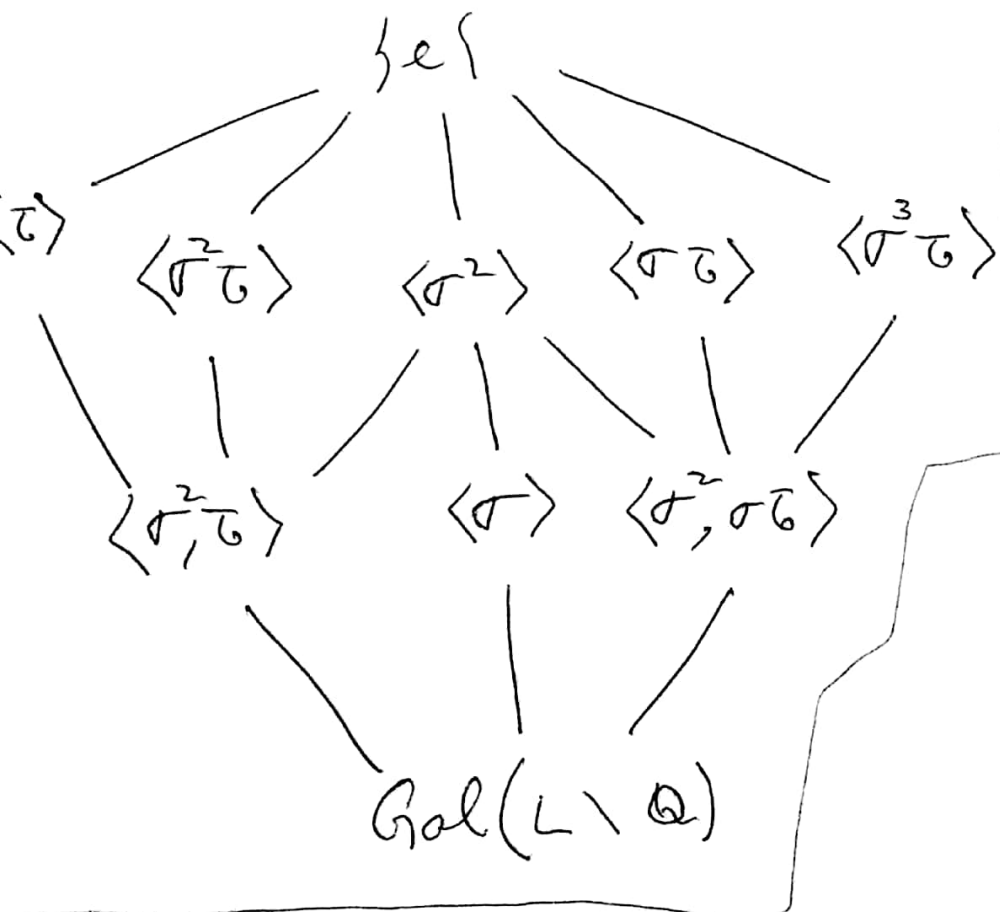
$\sigma(i) = i$

$\tau(i) = -i$

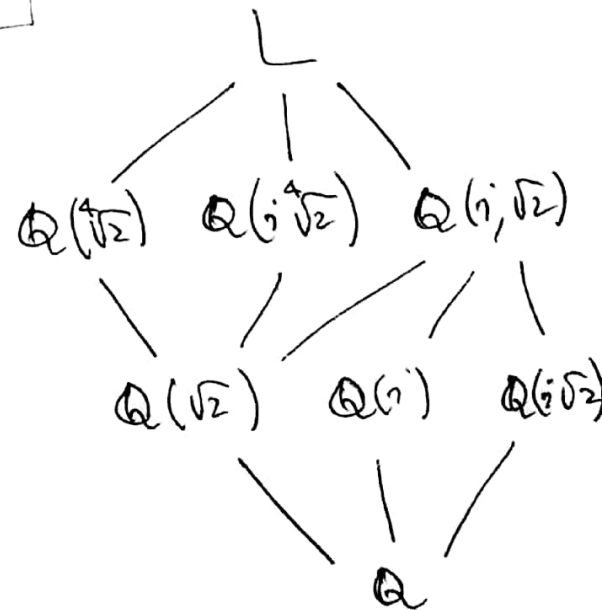
$\sigma(\sqrt[4]{2}) = i\sqrt[4]{2}$

$\tau(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$

$|D_4| = 8$  actúa en el cuadrado (4-ágono regular)



hemos visto hasta este momento:



$L_{\langle \sigma \tau \rangle} = ?$

$L_{\langle \sigma^3 \tau \rangle} = ?$

TAREA