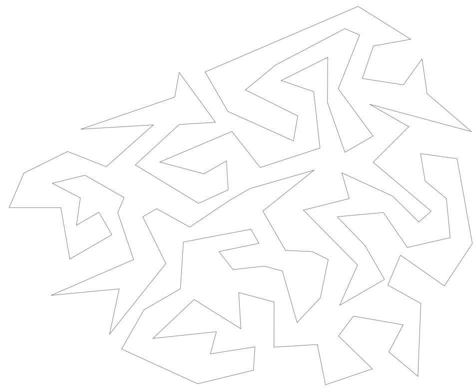
Topología del plano

Teorema de Jordan: Cada curva (simple y cerrada) separa al plano en 2 componentes conexas.

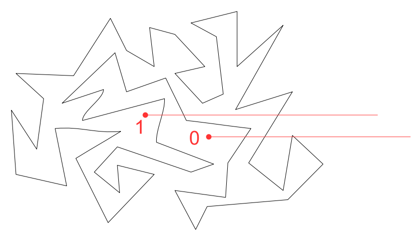


Una curva simple y cerrada

Los siguientes lemas muestran que el teorema de Jordan se cumple para curvas poligonales.

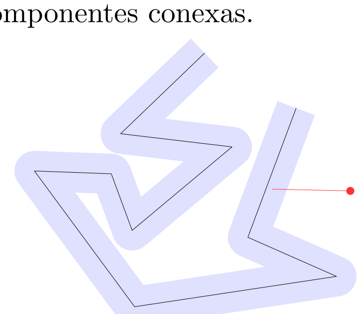
Lema Si c es una curva poligonal, $\mathbb{R}^2 - c$ tiene al menos 2 componentes conexas.

Dem. Elige una dirección en el plano distinta de las direcciones de los lados del polígono. Para cada punto p de $\mathbb{R}^2 - c$, cuenta el número de veces que el rayo que sale de p en esa dirección cruza a c, módulo 2. Esto define una función $f : \mathbb{R}^2 - c \to \{0, 1\}$. f es continua ya que para todos los puntos en una bolita centrada en p que no toque a c, el número de veces que los rayos intersectan a c difieren en un número par, por lo tanto f es igual en todos esos puntos. Como la función toma los valores 0 y 1 y es continua, el dominio no puede ser conexo. •



Lema. Si c es una curva poligonal, $\mathbb{R}^2 - c$ tiene a lo mas 2 componentes conexas.

Dem. Considera la vecindad regular V de c formada por los puntos del plano a distancia a lo mas ϵ de c, para un ϵ pequeño. Como V se ve localmente como $c \times [-1, 1]$, $V - c$ tiene a lo mas dos componentes conexas. Como V rodea a c, al viajar de un punto de $\mathbb{R}^2 - c$ hacia c debemos pasar por un punto de $V - c$, asi que cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 - c$ contiene al menos una componente conexa de $V - c$. •



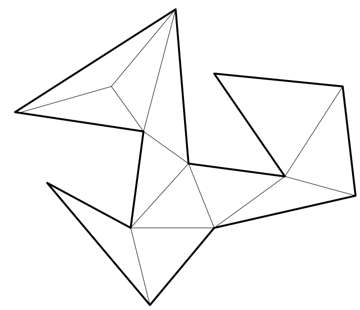
Teorema de Schoenflies: Cada curva (simple y cerrada) en el plano bordea un disco.

Los siguientes lemas prueban el teorema de Schoenflies para curvas poligonales.

Lema. Si c es una curva poligonal, la cerradura de la componente acotada de $\mathbb{R}^2 - c$ se puede triangular: es la unión de triángulos que se intersectan en lados y/o vértices, y cada lado de c es lado de un triangulo.

Dem. Ejercicio.

Un triángulo de la triangulación es libre si tiene dos lados en c o tiene un lado en c y el vertice opuesto no esta en c.

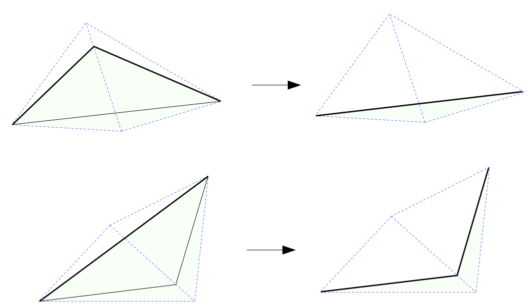


Lema. Si un poligono c tiene mas de 3 lados, entonces cada triangulación de la región acotada por c tiene triángulos libres.

Dem. Por inducción sobre el número de lados de c. Si c tiene 4 lados, la triangulacion tiene 2 triangulos y los dos son libres. Supongamos que cada triangulación de la región acotada por una curva poligonal con menos de n lados tiene 2 triángulos libres y consideremos la triangulación de la region R acotada por un poligono c con n lados. Si un tríangulo Δ que toca a c no es libre, entonces uno de los lados de Δ cruza a R y la divide en dos regiones R_1 y R_2 bordeadas por curvas c_1 t c_2 con menos de n lados. Por hiptesis de inducción cada una de esas regiones consiste de un solo triángulo o tiene 2 triángulos libres. En R dos de estos triángulos pueden estar pegados, pero los otros 2 triángulos deben ser libres. •

Lema. Si c es una curva poligonal en el plano, entonces existe un homeomorfismo del plano que convierte a c en un triángulo.

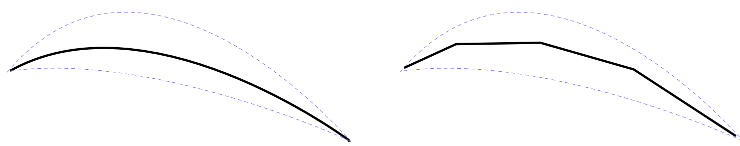
Dem. Por inducción sobre el número de triángulos en la región acotada por c. Veremos que si T es un triangulo libre, entonces existe un homomorfismo del plano que colapsa a T y envía c a una curva c' con menos lados. Hay un cuadrilátero Q que contiene a T y tal que $Q \cap c = T \cap c$. Es facil definir un homomorfismo lineal por pedazos $h : Q \to Q$ que es la identidad en $Fr(Q)$ y tal que $h(T) \subset R - T$, y este homeomorfismo se extiende al resto del plano como la identidad. •



Ahora podemos probar los teoremas de Jordan y Schoenflies para las curvas que en cada punto tienen una dirección bien definida, que varía de manera continua:

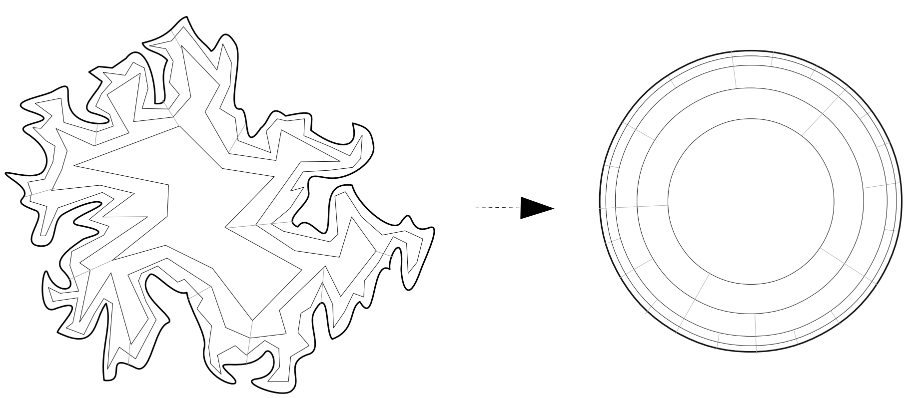
Lema. Si c es una curva suave en el plano, entonces existe un homomorfismo del plano que la transforma en una curva poligonal.

Dem. c es locamente la grafica de una función diferenciable $y = f(x)$ o $x = f(y)$. Como c es compacta, se puede partir en un número finito de arcos $a_1, a_2, ...a_n$ donde eso ocurra. Si a_i es la gráfica de la función diferenciable $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, podemos elegir funciones diferenciables g y h con $g(x) < f(x) < h(x)$ para $a < x < b$ de modo que la región R del plano definida por $g(x) \leq y \leq g(x)$ intersecta a c sólamente en a_i, y que además existe una función lineal por pedazos l con $g(x) < l(x) < h(x)$ para $a < x < b$ cuya grafica es un arco poligonal cntenido en R.



Ahora es facil ver que hay un homeomorfismo $h_i : R \to R$ que envía a_i al arco poligonal y que es la identidad en $Fr(R)$, asi que el homeomorfismo puede extenderse al resto del plano como la identidad. La composición de los h_i's para todos los arcos a_i convierte a todos los a_i en arcos poligonales. •

Los Teoremas de Jordan y Schoenflies para curvas topológicas pueden demostrarse aproximándolas con curvas poligonales, pero las pruebas son mas delicadas. Para demostrar el Teorema de Schoenflies se aproxima la curva c por curvas poligonales $c_1, c_2, c_3, ...$ de modo que cada una encierre a las anteriores. El Teorema de Schoenflies poligonal implica (tarea) que la region entre dos curvas poligonales es un anillo, pegando el disco cuyo borde es la curva c_1 con los anillos concentricos entre las otras curvas se ve que la region encerrada por c es homeomorfa a un disco abierto (para ver que el homeomorfismo se extiende a c y da un disco cerrado hay que tener mas cuidado, partiendo los anillos en discos cada vez mas pequeños).



Problemas

1. Muestra que todos los homeomorfismos del intervalo que preservan orientacion son isotópicos. Lo mismo para los homeomorfismos del circulo.

2. (Lema de Alexander) Cada homeomorfismo entre las fronteras de dos discos puede extenderse a un homeomorfismo entre los discos.

3. (Teorema del Anillo) Demuéstra usando el Teorema de Schoenflies que si c y c' son dos curvas en el plano, y c' encierra a c, entonces c y c' bordean un anillo.