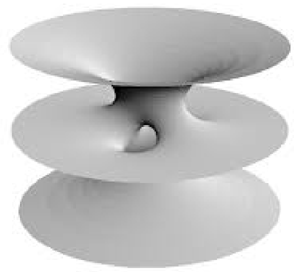
Superficies

Una **superficie** es un espacio topologico (conexo, hausdorff y con base numerable) tal que todos sus puntos tienen vecindades homeomorfas a discos abiertos o a medios discos abiertos. El **borde** de la superficie está formado por los puntos que no tienen vecindades del primer tipo.



]

Las superficies compactas y sin borde se llaman **cerradas**, las superficies no compactas y sin borde se llaman **abiertas**.

Para saber como son todas las formas posibles de las superficies, hay que hallar una manera de construirlas que garantice que no se escape ninguna posibilidad, y hallar una característica intrínseca e independiente de la construcción que permita distinguir las distintas formas.

Una **triangulación** de una superficie S es una subdivisión S en triángulos topológicos que se tocan en aristas o en vértices. Una superficie es triangulable si y sólo si es homeomorfa a un complejo simplicial.

Teorema: Todas las superficies son triangulables.

Idea de la demostración. Vamos a asumir que S es una superficie sin borde. Cada punto de S tiene una vecindad homeomorfa a un disco abierto, y como S tiene una base numerable, tiene una cubierta formada por una cantidad a lo mas numerable de discos abiertos $D_1, D_2, D_3, ...$ Existen discos cerrados mas pequenos $E_i \subset Di$ cuyos interiores aún cubren a S y podemos suponer que esta cubierta es localmente finita. Aun asi, los E_i's pueden traslaparse de maneras complicadas (ver la figura).

]

Queremos ver que podemos cubrir a S con discos cerrados que solo se toquen en sus bordes, si logramos hacer esto entonces cada disco es un polígono topológico cuyos lados son las intersecciones con los otros discos y dividiendo a cada polígono en triángulos ya acabamos. Los bordes de los E_i's son curvas simples cerradas, si estas se intersectan en un número finito de puntos, la unión de las curvas corta a S en una colección finita de discos cerrados (ya que por el teorema de Schoenflies los arcos de las curvas que atraviesan a cada E_i lo cortan en discos) y estos se intersectan solo en el borde y ya acabamos. Pero si los bordes se intersectan una infinidad de veces, hay que modificar los E_i's para evitarlo.

(Falta terminar) •

Corolario: Existen a lo mas una cantidad numerable de superficies compactas no homeomorfas.

Dem. Cada superficie se obtiene pegando un número finito de triángulos por sus lados. El resultado de pegar dos lados no depende del homeomorfismo de pegado, sino solamente de que este preserve o invierta la orientación (tarea). Así que con n triángulos solo pueden obtenerse una cantidad finita de superficies no homeomorfas. •

Corolario: Todas las superficies se pueden encajar en $\mathbb{R}^5$.

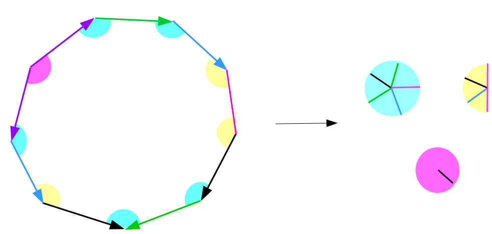
Dem. Esto es consecuencia de que cada complejo simplicial K de dimension n se puede encajar en $\mathbb{R}^{2n+1}$: basta enviar el conjunto de vertices de K a un conjunto de puntos en posicion general* en $\mathbb{R}^{2n+1}$ y enviar los simplejos de K a los simplejos generados por esos puntos. El resultado debe ser un encaje porque si dos de esos simplejos de dimensiones $i, j \leq n$ se cruzaran, su union estaría contenida en un subespacio de dimension $i + j$ que contendría a sus $i + j + 2$ vertices, y estos no estarían en posicion general. (*un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^N$ está en posicion general si en cada subespacio de dimension $d < N$ hay a lo mas $d + 1$ puntos). •

Corolario: Cada superficie compacta S puede cortarse para obtener un disco, por lo tanto S puede obtenerse de un disco poligonal identificando lados por pares.

Dem. S es una unión finita de triángulos pegados por aristas. Numeremos los triángulos de modo que el i-esimo triángulo tenga al menos una arista en común con alguno de los triángulos anteriores. El disco es la unión de todos los triángulos, unidos por una arista de cada triángulo de las que lo unen con los anteriores. Las aristas que quedan sin pegar son los lados del polígono. •

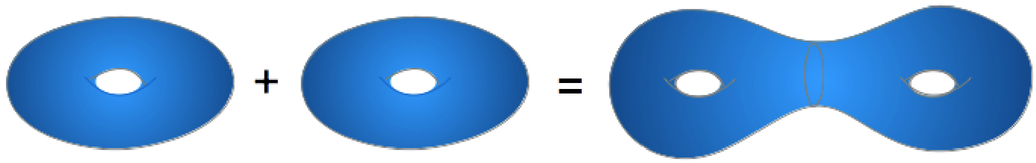
Lema. Toda disco poligonal con lados identificados por pares produce una superficie.

Dem. Basta ver que cada punto del cociente $P/*$ tiene una vecindad homeomorfa a un disco o a medio disco. Esto es inmediato para los puntos que vienen del interior de P o de lados no identificados de P



Los puntos que vienen de lados identificados de P tienen vecindades que son la unión de dos medios discos y los puntos que vienen de vértices de P tienen vecindades que son la unión de pedazos de discos en las esquinas de P, que se pegan consecutivamente, asi que deben formar un disco o medio disco. •

La **suma conexa** de dos superficies es la superficie que se obtiene quitándole un disco a cada una y pegando los bordes que quedan.

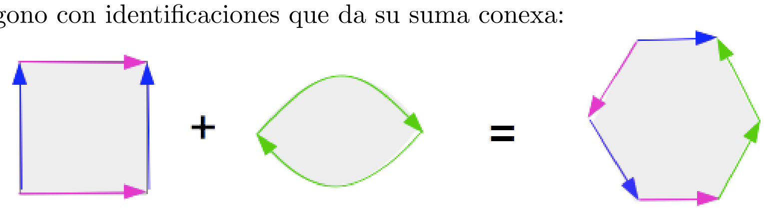


Lema: La suma conexa está bien definida (no depende de los discos ni del pegado).

Dem. Tarea (es consecuencia del teorema del anillo). •

La suma conexa define una operación en el conjunto de las superficies (salvo homeomorfismo) que es asociativa y conmutativa. Sumar esferas no cambia a las superficies (la esfera es el neutro) y sumar discos equivale a hacerle hoyos a las superficies.

Observar que los polígonos con identificaciones que dan dos superficies pueden combinarse para obtener un polígono con identificaciones que da su suma conexa:



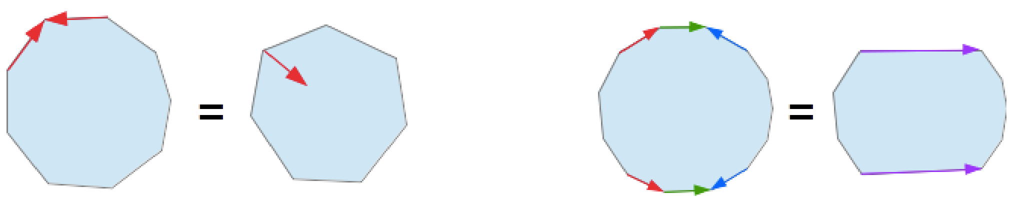
T^2 $\qquad$ P^2 $\qquad$ $T^2 + P^2$.

Teorema: Todas las superficies cerradas son homeomorfas a esferas, o sumas conexas de toros y de planos proyectivos.

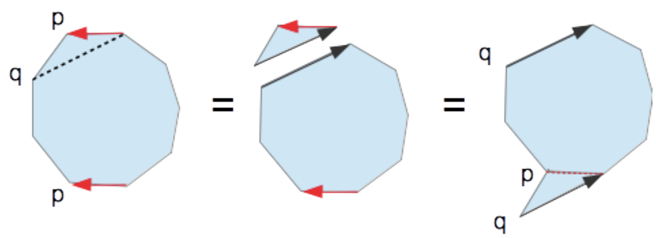
Dem. Hay que ver que cualquier polígono P con lados identificados por pares puede recortarse y pegarse para obtener otro polígono cuyas identificaciones corresponden a una esfera o una suma conexa. Esto se hace en varios pasos:

1. Modificar P para que todos sus vértices estén identificados en la superficie:

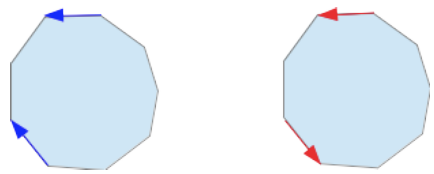
a) Reducir lo mas posible el número de lados del polígono.



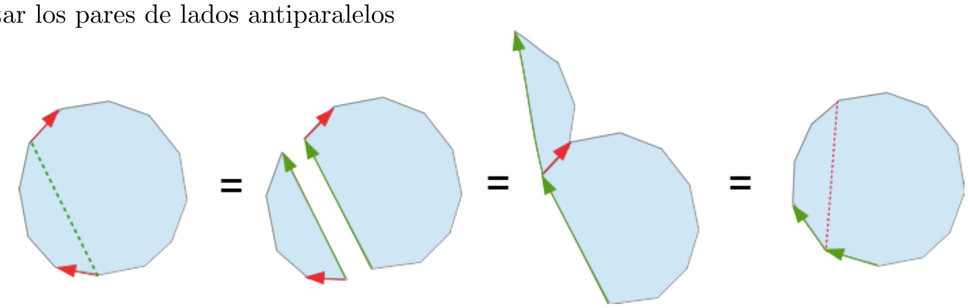
b) Si hay vértices de P que van a dos puntos distintos de la superficie, podemos modificar a P para disminuir los vertices que van al segundo y aumentar los que van al primero (hasta que solo uno vaya al primero, y entonces se puede aplicar a)



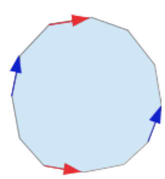
Llamaremos a los pares de lados identificados *paralelos* o *antiparalelos* de acuerdo a su orientación:



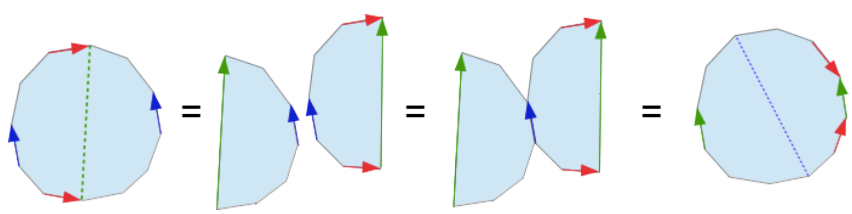
2. Juntar los pares de lados antiparalelos

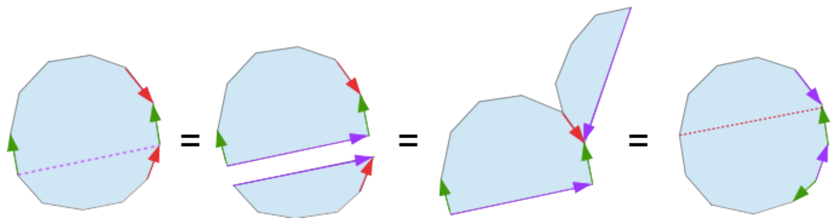


Haciendo los pasos 1 y 2 podemos suponer que todos los vértices del polígono se identifican a un solo punto y que todos los pares de lados antiparalelos son consecutivos. Ahora los pares de lados paralelos que queden tienen que venir en parejas: para cada par de lados paralelos hay otro par de lados paralelos tales que quedan uno de cada lado (de otro modo los vértices de un lado del polígono no estarían identificados con los vértices del otro lado).



3. Juntar parejas de pares de lados paralelos.





Haciendo 1,2 y 3 terminamos con un poligono con los lados identificados en secuencias que corresponden a toros y/o planos proyectivos.

Problemas

1. Si S es una superficie y p y q son dos puntos de S que no estan en el borde, entonces existe un homeomorfismo de S que lleva p a q.

2. ¿Cual es el mínimo número de discos abiertos con que puede cubrirse...

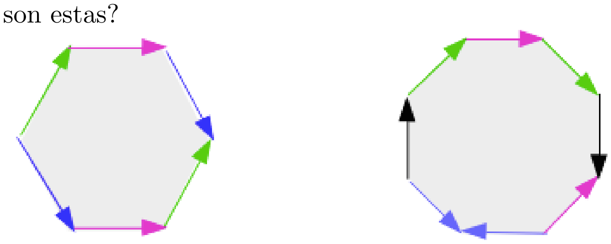
   a) el toro? b) el plano proyectivo? c) la suma conexa de dos superficies? d) una superficie compacta con borde?

3. ¿En cuales superficies vale el Teorema de Jordan? ¿Y el teorema de Schoenflies?

4. Demuestra que la suma conexa está bien definida, y que es asociativa.

5. Demuestra que si la suma de dos superficies es una esfera, entonces las dos superficies son esferas. ¿Puedes mostrar que si el toro o el plano proyectivo son la suma conexa de dos superficies, una de ellas debe ser una esfera?

6. ¿Que superficies son estas?



7. Muestra que $P^2 + P^2 + P^2 = T^2 + P^2$ y que $T^2 + K^2 = K^2 + K^2$ (asi que la factorización como suma conexa de toros y planos proyectivos no es única, y cualquier suma de planos proyectivos y toros es suma de planos proyectivos).

8. Demuestra que empezando con dos superficies compactas no homeomorfas y haciendoles agujeros (removiendo discos ajenos) no pueden obtenerse superficies homeomorfas.