Invariantes

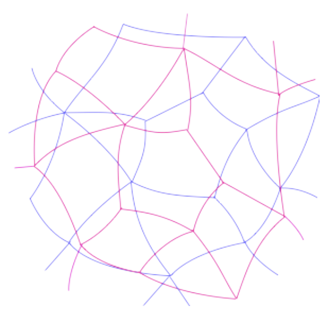
Para distinguir entre las formas topologicas de las superficies, hay que asociarle a cada una algo que no cambie al hacer homeomorfismos pero que si cambie al cambiar de forma. Estos invariantes topológicos pueden ser números, grupos o otras cosas.

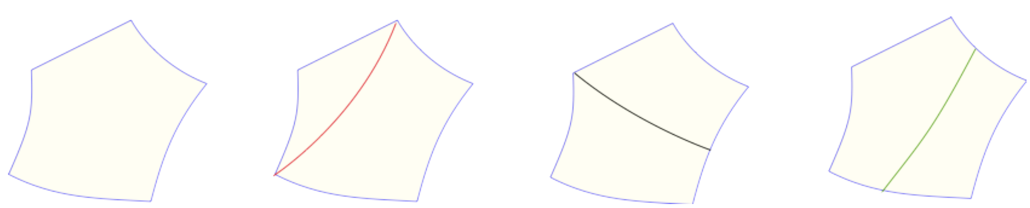
Una **subdivisión celular** de una superficie F es una subdivisión de F en subconjuntos homomorfos a discos poligonales que se tocan sólamente en aristas o en vértices.

La **característica de Euler** χ de una superficie subdividida en celdas es $\chi = v - a + c$ donde $v = \#vertices$, $a = \#aristas$ y $d = \#celdas$ de la subdivisión.

Teorema: la característica de Euler de una superficie solo depende de la forma topológica (y no de la subdivisión).

Idea de la demostración. Hay que ver que para cualesquiera dos subdivisiones celulares de S el conteo $v - a + c$ es el mismo. Los vértices y las aristas de cada subdivisión forman una gráfica en S. Si dos de estas gráficas se intersectan en un número finito de puntos, su unión es una gráfica finita que da una subdivisión celular común a las dos divisiones originales. Así que para ver que χ es invariante bajo subdivisiones, basta ver que al subdividir cada celda repetidamente, anadiendo cada vez una arista, el conteo no cambia.





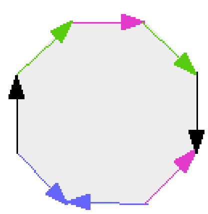
v	v	$v+1$	$v+2$
a	$a+1$	$a+2$	$a+3$
c	$c+1$	$c+1$	$c+1$

Como el número de aristas aumenta igual que la suma de vértices y celdas, $v - a + c$ no cambia.

Es posible que las gráficas correspondientes a dos subdivisiones celulares se intersecten en una infinidad de puntos, y que una subdivisión común no exista. En este caso hay que mosotrar que es posible deformar una de las gráficas -por una isotopia de la superficie- hasta que intersecte a la otra transversalemente en un número finito de puntos. Como la deformación no cambia el número de vértices, aristas ni celdas de esa subdivisión, el resultado se sigue de lo anterior. •

Cada superficie cerrada orientable es homeomorfa a una esfera o una suma conexa de toros, o una suma conexa de planos proyectivos. El **género** de una superficie cerrada es el número de toros o de planos proyectivos en la factorización. El género de una superficie con borde es el género de la correspondiente superficie cerrada. Como la suma de n toros se obtiene de un $4n$-agono identificando los lados por pares e identificando todos los vértices entonces $\chi(nT^2) = 2-2n$. Como la suma de n planos proyectivos se obtiene de un $2n$-agono identificando los lados por pares y identificando todos los vértices, entonces $\chi(nP^2) = 1-n$, por lo tanto el género de las superficies está bien definido.

Ejemplo. Considerar la superficie S obtenida al identificar los lados de este polígono:



Al identificar los lados en S quedan 3 vertices, 4 aristas y una celda, por lo tanto $\chi(S) = 3-4+1 = 0$. Como S no es orientable (contiene una banda de Moebius) entonces $S = 2P^2 = K^2$.

Lema. Si $\bar{S}$ es una cubierta de grado n de la superficie S entonces $\chi(\bar{S}) = n\chi(S)$.

Dem. Cada subdivision celular de S se levanta a una subdivision celular de $\bar{S}$ (ya que las celdas son simplemente conexas, la preimagen de cada celda consta de n celdas en $\bar{S}$. •

Ejemplo. Como la esfera es una cubierta doble del plano proyectivo (ya que P^2 se obtiene de la esfera identificamdo puntos antipodas) entonces $\chi(P^2) = \chi(S^2)/2 = 1$.

Lema. La característica de Euler es, salvo múltiplos, la única función lineal de v, a y c que es un invariante topológico de las superficies.

Dem. Considerar $X(S) = kv + la + mc$ para $k, l, m \in \mathbb{R}$ y ver que relaciones debe haber entre k, l, m para que $X(S)$ no cambie al dividir una celda (Tarea). •

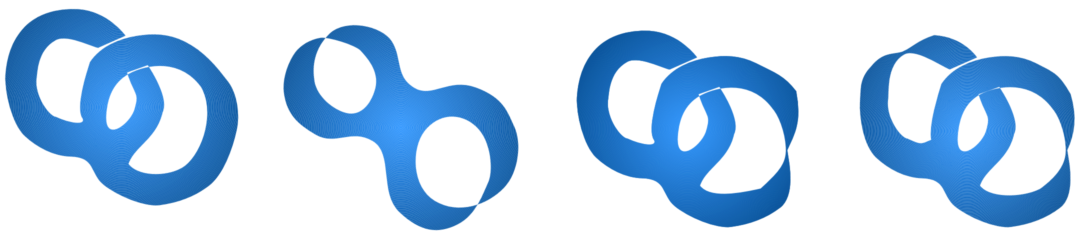
Problemas

1. Muestra que $\chi(S + S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$.

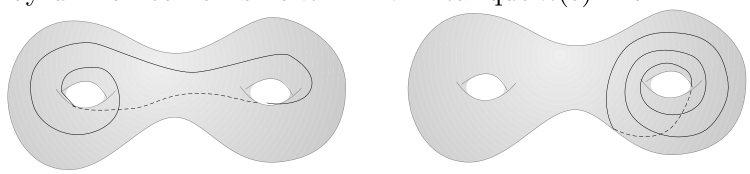
2. ¿Cuantas superficies compactas hay con la misma caracteristica de Euler?

3. Muestra que la caracteristica de euler, la orientabilidad y el número de componentes en la frontera determinan la forma de cada superficie compacta.

4. ¿Que superficies son estas?



5. Si F es una superficie cerrada orientable y c y c' son dos curvas no separantes en F, entonces hay un homeomorfismo $h : F \to F$ tal que $h(c) = c'$



6. Demuestra que si F es una superficie de género g entonces cualquier colección de $g + 1$ curvas simples, cerradas y ajenas en F separan a F. (hint: ¿Como cambia el genero al cortar por una curva no separante?)

7. Para cada superficie compacta no orientable S existe una curva cerrada c tal que $S - c$ es orientable.

8. ¿De que géneros pueden ser las cubiertas finitas de una superficie cerrada de género 3?

Homología

Si X es un espacio topológico, un n-**simplejo singular** en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$ del n -simplejo estandar a X. La **frontera** de un simplejo singular $\sigma : \Delta^n \to X$ es la suma (con signos) de los $n-1$ simplejos singulares dados por las restricciones de σ a los $n-1$ simplejos que forman $\partial\Delta^n$. Los signos se eligen para que $\partial\partial\Delta = 0$

Una n-**cadena singular** en X es una combinación lineal de n-simplejos singulares en X.

La **frontera** de una n-cadena es la suma de las fronteras de los simplejos que la forman.

Un n-**ciclo** es una n-cadena con fontera trivial, una n-**frontera** es una n-cadena que es frontera de $n+1$ cadena. Como $\partial\partial\Delta = 0$, las n-fronteras son n-ciclos.

Dos n-ciclos α y β son **homologos** si $\alpha - \beta$ es una frontera.

Las n-cadenas singulares de X forman un grupo abeliano que es denotado por $C_n(X)$. Los n-ciclos forman un subgrupo $C_n(X)$, denotado por $Z_n(X)$ y las n-fronteras forman un subgrupo de $Z_n(X)$, denotado por $B_n(X)$.

El cociente $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ es el n-esimo **grupo de homologia singular** de X.

Lema. Si X tiene n componentes arcoconexas entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}^n$

Lema. $H_i(\mathbb{R}^n) = 0$ para toda $i > 0$.

Cada función continua $f : X \to Y$ induce un homomorfismo de grupos $f_\# : C_n(X) \to C_n(Y)$ que envía un simplejo singular $\sigma : \Delta^n \to X$ al simplejo singular $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$.

Como $f_\#$ conmuta con el operador frontera ($\partial f\sigma = f\partial\sigma$) entonces $f_\#$ manda ciclos en ciclos y fronteras en fronteras y por lo tanto f induce un homomorfismo $f_\# : H_n(X) \to H_n(Y)$.

Los homomorfismos inducidos en homología safisfacen:

1. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ entonces $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$
2. $Id_\# = Id$

En particular, los grupos de homología singular de un espacio son invariantes topológicos (los homomorfismos inducidos por un homeomorfismo son isomorfismos).

Lema. Si $f, g : X \to Y$ son funciones homotópicas, entonces $f_\# = g_\#$.

Idea de la demostración. Sea $c = \sum a_i\sigma_i$ es un n-ciclo singular en X. Necesitamos ver que los ciclos singulares $fc = \sum a_i f \circ \sigma_i$ y $gc = \sum a_i g \circ \sigma_i$ son homologos en Y.

Para cada simplejo singular $\sigma_i : \Delta^n \to X$, los simplejos singulares $f \circ \sigma_i$ y $g \circ \sigma_i$ son homotópicos. Si $H_i : \Delta \times [0,1] \to Y$ es una homotopía entre ellos, $\Delta \times I$ admite una subdivisión canónca en $n+1$-simplejos que tienen a $\Delta \times 0$ y $\Delta \times 1$ como caras. La restricción de H_i a estos simplejos define una $n+1$ cadena singular cuya frontera es $f \circ \sigma - g \circ \sigma + f(\partial\sigma \times [0,1])$.

Corolario. Si X y Y son homotopicamente equivalentes entonces sus grupos de homología $H_i(X)$ y $H_i(Y)$ son isomorfos para cada i.

Dem. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ son dos funciones continuas tales que $g \circ f \simeq Id|_X$ y $f \circ g \simeq Id|_Y$ entonces por los lemas anteriores $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\# = Id_\# = Id$ y $f_\# \circ g_\# = (f \circ g)_\# = Id_\# = Id$ asi que $f_\#$ y $g_\#$ son invertibles y por lo tanto son isomorficmos. •

La **subdivision baricéntrica** de un simplejo Δ^n es una descomposición canónica en simplejos mas pequeños cuyos vértices son los baricentros de las caras de todas las dimensiones de Δ^n.

Si $\sigma : \Delta \to X$ es un simplejo singular en X, la restricción de σ a cada uno de los simplejos que forman la subdivisión da un simplejo singular en X, de modo que σ puede subdividirse como una cadena singular, y la frontera de la subdivisión de σ es la subdivisión de la frontera de σ.

Lema. Cada n-ciclo singular en X es homólogo a un n-ciclo formado por simplejos singulares arbitrariamente chicos.

Idea de la demostración. Hay que ver que si $c = \sum$ es un ciclo y c' es la cadena formada por la subdivisión baricéntrica de cada σ_i entonces c' es un ciclo homólogo a c. Esto ocurre porque el producto $\Delta \times I$ admite una subdivisión canónica en simplejos que coincide con la subdivisión baricéntrica en $\Delta \times 1$ y que no subdivide a $\Delta \times 0$. Haciendo subdivisiones baricéntricas repetidas obtenemos ciclos homólogos cuyos simplejos son cada vez mas chicos.

Cálculos de homología

Si X es unión de dos abiertos A y B, entonces para cada i las inclusiones inducen homomorfismos de homología

$$\begin{array}{ccccc} & i_1 & H_i(A) & j_1 & \\ H_i(A\cap B) & & & & H_i(A\cup B) \\ & i_2 & H_i(B) & j_2 & \end{array}$$

Además para cada i hay un homomorfismo $H_i(A\cup B) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(A\cap B)$ que se define así:

Cada ciclo c en $A\cup B$ es homólogo a un ciclo c' formado por simplejos que están totalmente contenidos en A o en B (c' se obtiene por subdivisiones baricentricas repetidas de c). Así que podemos escribir $c' = a + b$ donde a es una cadena en A y b es una una cadena en B, de modo que $\partial a = -\partial b$ es un ciclo en $A\cap B$. Definimos $\partial[c] = [\partial a] = [-\partial b]$. Para ver que ∂ esta bien definida, tenemos que ver que no depende de la elección del ciclo c que representa a la clase de homología, ni de la subdivisión c' ni de la manera en que separamos a c' como suma de una cadena en A y una en B.

Lo último es cierto porque si escribimos $c' = a + b$ y $d' = a' + b'$ con a, a' en A y b, b' en B, entonces $a - a' = b' - b$ es una cadena en $A\cap B$ por lo tanto a es homóloga a a' en $A\cap B$.

Teorema.(Mayer-Vietoris) Si A y B son abiertos de X entonces la siguiente sucesión es exacta:

$$\cdots \to H_{i+1}(A\cup B) \xrightarrow{\partial} H_i(A\cap B) \xrightarrow{(i_1,i_2)} H_i(A)+H_i(B) \xrightarrow{j_1-j_2} H_i(A\cup B) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(A\cap B) \to \dots$$

Dem. Ver Hatcher

Homología de las gráficas

Sabiendo que $H_i(S^1) = 0$ para $i > 1$ y que $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$, podemos calcular $H_1(S^1)$ usando Mayer-Vietoris, viendo a S^1 como la unión de dos intervalos abiertos cuya intersección (dos subintervalos) es homotopicamente equivalente a S^0.

$$\begin{array}{ccccccccc} \to H_1(I)\oplus H_1(I') & \to & H_1(S^1) & \to & H_0(S^0) & \to & H_0(I)\oplus H_0(I') & \to \\ \to \quad 0 \quad \oplus \quad 0 & \to & & \to & \mathbb{Z}+\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \;+\; \mathbb{Z} & \to \\ & & & & {\scriptstyle (i,j)} & \to & {\scriptstyle (i+j,-i-j)} & \end{array}$$

Como la sucesión es exacta, $H_1(S^1)$ se inyecta en $H_0(S^0)$ como la imagen de ∂, que es igual al kernel de σ, que está generado por $(i,-i)$ y por lo tanto $H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Lema. Si G es una gráfica conexa con v vértices y a aristas entonces $H_1(G) \simeq \mathbb{Z}^{a-v+1}$

Dem. Empezar por un arbol generador de G y añadir aristas una por una. La sucesión de Mayer Vietoris muestra que al añadir cada arista, H_i no cambia si $i \neq 1$ y H_1 gana un sumando $\mathbb{Z}$.

Corolario. Si F es una superficie con borde, entonces $H_2(F) = 0$ y $H_1(F) \simeq \mathbb{Z}^{1-\chi(F)}$

Dem. F es homotópicamente equivalente a una gráfica con la misma característica de Euler (para una triangulación de S podemos ir colapsando los triángulos "libres"que tienen alguna arista en el borde, hasta que no queden triángulos, y esto no cambia la característica $v - a + c$.

Homología de las superficies cerradas.

Para cada superficie F, $H_i(F) = 0$ para $i > 2$ y $H_0(F) \simeq \mathbb{Z}$, podemos calcular $H_1(F)$ y $H_2(F)$ usando la sucesión de Van Kampen.

La esfera es la unión de dos discos D y D' que se intersectan en un anillo A.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
H_2(D)\oplus H_2(D') & \to & H_2(S^2) & \to & H_1(A) & \to & H_1(D)\oplus H_1(D') & \to & H_1(S^2) & \xrightarrow{\partial} & H_0(A) & \to & H_0(D)\oplus H_0(D') \\
0 \oplus 0 & & & & & & 0 \oplus 0 & & & & \mathbb{Z} & \underset{(1,-1)}{\hookrightarrow} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
\end{array}$$

Como la sucesión es exacta, $H_2(S^2) \simeq H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ $\qquad H_1(S^2) \simeq Im(\partial) = ker(1 \to (1,-1)) = 0.$

El toro es la unión de dos cilindros A y A' que se intersectan en dos anillos delgados.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
H_2(A)\oplus H_2(A') & \to & H_2(T^2) & \xrightarrow{\partial} & H_1(A\cap A') & \to & H_1(A)\oplus H_1(A') & \to & H_1(T^2) & \to & H_0(A\cap A') & \to \\
0 \oplus 0 & & & & \mathbb{Z}+\mathbb{Z} & \underset{(a+b,-a-b)}{\to} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \underset{(c+d,-c-d)}{\hookrightarrow}
\end{array}$$

$H_2(T^2) \simeq Im(\partial) \simeq ker((a,b) \to (a+b,-a-b)) = \mathbb{Z}$ $\qquad H_1(T^2) \simeq ?$

El plano proyectivo es unión de una banda de moebius M y un disco D, su intersección es un anillo A que le da dos vueltas a M.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
H_2(M)\oplus H_2(D) & \to & H_2(P^2) & \xrightarrow{\partial} & H_1(A) & \to & H_1(M)\oplus H_1(D) & \to & H_1(P^2) & \to & H_0(A) & \to & H_0(M)\oplus H_0(D) \\
0 \oplus 0 & & & & \mathbb{Z} & \underset{(2,0)}{\hookrightarrow} & \mathbb{Z} \oplus 0 & & & & \mathbb{Z} & \underset{(1,-1)}{\hookrightarrow} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}
\end{array}$$

$H_2(P^2) \simeq Im(\partial) \simeq ker(1 \to (2,0)) = 0$ $\qquad H_1(P^2) \simeq \mathbb{Z}+0/Im(1 \to (2,-0)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$

Lema. Si F es una superficie cerrada orientable $H_1(F) \simeq \mathbb{Z}^{2-\chi(S)}$ y $H_2(F) \simeq \mathbb{Z}$. Si F es una superficie cerrada no es orientable $H_1(F) \simeq \mathbb{Z}^{1-\chi(S)} + \mathbb{Z}_2$ y $H_2(F) \simeq 0$.

Dem. Cada superficie cerrada F puede obtenerse de un $2n$-agono P identificando sus lados por pares, de modo que la imagen de ∂P en F es una grafica con 1 vertice y n aristas. F es la unión de un disco D (el interior de P) y una vecindad G de la gráfica. D y G se intersectan en el anillo A que rodea a ∂P en P.

$$H_2(G) \oplus H_2(D) \to H_2(F) \to H_1(A) \to H_1(G) \oplus H_1(D) \to H_1(F) \to H_0(A) \to H_0(G) \oplus H_0(D)$$

Si F es orientable, los lados apareados en P tienen orientaciones opuestas en ∂P y el generador de $H_1(A)$ va a (0,0,....,0) en $H_1(G) \simeq \mathbb{Z}^n$

$$0 \quad \oplus \quad 0 \quad \underset{0}{\to} \quad H_2(F) \quad \to \quad \mathbb{Z} \quad \underset{(0,0,\ldots,0)}{\to} \quad \mathbb{Z}^n \quad \oplus \quad 0 \quad \to \quad H_1(F) \quad \underset{0}{\to} \quad \mathbb{Z} \quad \hookrightarrow \quad \mathbb{Z} \quad \oplus \quad \mathbb{Z}$$

Así que $H_2(F) \simeq \mathbb{Z}$ y $H_2(F) \simeq \mathbb{Z}^n$.

Si F no es orientable, algunos lados apareados en P tienen orientaciones iguales en ∂P, el generador de $H_1(A)$ va al elemento de $H_1(G) \simeq \mathbb{Z}^n$ que tiene 2's en los generadores correspondientes a esos pares y 0's en los otros.

$$0 \quad \oplus \quad 0 \quad \underset{0}{\to} \quad H_2(F) \quad \overset{\partial}{\to} \quad \mathbb{Z} \quad \underset{(0,2,\ldots,0)}{\hookrightarrow} \quad \mathbb{Z}^n \quad \oplus \quad 0 \quad \to \quad H_1(F) \quad \underset{0}{\to} \quad \mathbb{Z} \quad \hookrightarrow \quad \mathbb{Z} \quad \oplus \quad \mathbb{Z}$$

$H_2(F) \simeq Im(\partial) = ker(1 \to (0, 2, 0, .., 0)) = 0.$

$H_1(F) \simeq \mathbb{Z}^n / Im(1 \to (0, 2, 0, .., 0)) \simeq \mathbb{Z}^{n-1} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$

El lema anterior muestra que los grupos de homologia distinguen a todas las superficies cerradas.

Problemas

9. Si $\mathbb{R}^2$ es la unión de dos abiertos conexos A y B entonces $A \cap B$ es conexo.
10. ¿Como cambia la homologia de una superficie al hacerle un hoyo?
11. Si F es una superficie, cada clase en $H_1(F)$ está representada por una colección de curvas simples y ajenas.
12. ¿Si F es una superficie cerrada no orientable, que curva en F representa al elemento de orden 2 en $H_1(F)$?
13. Las curvas simples en una superficie F representan clases primitivas de $H_1(F)$ (i.e. que no son múltiplos de otras clases).
14. Cada isomorfismo de $H_1(T^2)$ es inducido por un homemorfismo de T^2.
15. Muestra que el toro admite un homeomorfismo de orden 3.

El grupo fundamental

Si E un espacio topológico arcoconexo y p es un punto de E, las clases de homotopia de caminos en E que empiezan y terminan p, multiplicados por concatenación, forman el grupo fundamental de E, denotado por $\pi_1(E)$.

Cada aplicación continua $f : X \to Y$ induce un homomorfismo de grupos $f_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ con las siguientes propiedades:

- $id_* = id$
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
- Si f es homotópica a g fijando el punto distinguido entonces $f_* = g_*$

Si $E = A \cup B$ con A,B y $A \cap B$ abiertos arcoconexos entonces las inclusiones inducen homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc} & & i_1 & \pi_1(A) & j_1 & & \\ \pi_1(A \cap B) & & & & & & \pi_1(A \cup B) \\ & & i_2 & \pi_1(B) & j_2 & & \end{array}$$

Teorema de Seifert-Van Kampen. Si $E = A \cup B$ con A,B, $A \cap B$ abiertos arcoconexos entonces $\pi_1(E) \simeq \pi_1(A) * \pi_1(B) \ / \ N$

donde N es subgrupo normal generado por $\{ \ i_1(c)i_2(c)^{-1} \ / \ c \in \pi_1(A \cap B) \ \}$

Dem. Ver Hatcher

Corolario. Si i_1 y i_2 son monomorfismos, entonces j_1 y j_2 tambien son monomorfismos.

Aunque la demostración del teorema de Van Kampen requiere que E sea la unión de dos abiertos A y B, el resultado vale si A y B son cerrados, siempre y cuando existan abiertos en E que se retraigan por deformacion a A y a B, ya que en este caso sus grupos de A, B y $A \cap B$ son isomorfos a los grupos de los abiertos que los contienen, y los homomorfismos inducidos son iguales.

El teorema de Seifert-Van Kampen permite calcular los grupos fundamentales de las gráficas y las superficies.

Lema. Si G es una gráfica finita, $\pi_1(G)$ es un grupo libre en $1 - \chi(G)$ generadores.

Corolario. Si F es una superficie con borde, entonces $\pi_1(F)$ es libre de rango $1 - \chi(S)$.

Los grupos de las superficies cerradas se obtienen expresandolas como un polígonos con lados identificados, y tomando a A como el interior del polígono P y a B como una vecindad de la gráfica formada por ∂P. $A \cap B$ es un anillo y el generador de $\pi_1(A \cap B)$ es trivial en $\pi_1(A)$ y es la palabra dada por ∂P en $\pi_1(B)$.

- $\pi_1(P^2) \simeq \langle a \ / \ a^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\pi_1(T^2) \simeq \langle a, b \ / \ aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- $\pi_1(K^2) \simeq \langle a, b \ / \ abab^{-1} = 1 \rangle$
- $\pi_1(nP^2) \simeq \langle a_1, a_2, ..., a_n \ / \ a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 = 1 \rangle$
- $\pi_1(nT^2) \simeq \langle a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n \ / \ a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1 \rangle$

Lema Si F es una superficie distinta de un disco y c es una componente de ∂F entonces $i_* : \pi_1(c) \to \pi_1(F)$ es un monomorfismo.

Dem. Ejercicio

Corolario Si c es una curva simple en una superficie F, entonces $i_* : \pi_1(c) \to \pi_1(F)$ es un monomorfismo, a menos que c bordee un disco.

Dem. Si c no separa a F entonces c no puede ser homologa a 0, asi que c no puede ser homotopica a 0. Si c separa a F entonces es el borde de dos subsuperficies F' y F''. Si ninguna es un disco entonces los mapeos inducidos $i' : \pi_1(F') \to \pi_1(F)$ y $i'' : \pi_1(F'') \to \pi_1(F)$ son monomorfismos y por el Teorema de Van Kampen $i* : \pi_1(c) \to \pi_1(F)$ es un monomorfismo.

Lema Si F es una superficie abierta con $\pi_1(F) = 0$ entonces F es homeomorfa al plano.

Dem. F es una unión anidada de superficies compactas $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset ... \subset F_n \subset ...$ cada una contenida en el interior de la siguiente. Como $\pi_1(F) = 0$, si c_i es una componente de ∂F_i entonces c_i es el borde de un disco D_i en F y D_i intersecta a F_i en c_i o D_i contiene a F_i. En ambos casos podemos reemplazar a F_i con un disco que contiene a F_i, y esto muestra que F es una unión anidada de discos $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset ... \subset F_n \subset ...$ cada uno contenido en el interior del siguiente. El teorema del anillo implica que F es la unión de un disco con una colección numerable de anillos concéntricos, y esto es un disco abierto.

Observar que una superficie abierta cuyo grupo fundamental no es finitamente generado no puede ser homeomorfa al interior de una superfice compacta.

Teorema Si F es una superficie abierta y $\pi_1(F)$ es finitamente generado, entonces F es homeomorfa al interior de una superficie compacta.

Dem. Tomar una colección finita de lazos en F que generen a $\pi_1(F)$ y una subsuperficie compacta N de F que los contenga. Entonces $i_* : \pi_1(N \to \pi_1(F)$ es un epimorfismo. Si c es una componente de ∂N entonces por el lema anterior $\pi_1(c)$ se inyecta en $\pi_1(F)$ a menos que c bordee un disco D en F. Como D esta de un lado de c, entonces D intersecta a N en c o D contiene a N, pero en este caso todos los lazos en N serían triviales en F y $\pi_1(F) = 0$. Asi que D debe ser una de las componentes de $F - N$ y podemos cambiar N por $N' = N \cup c_i$, que es una superficie con menos fronteras que cumple que $i_* : \pi_1(N' \to \pi_1(F)$ es un epimorfismo. Podemos suponer que ninguna componente c de ∂N bordea un disco en F y por lo tanto $\pi_1(c)$ se inyecta en $\pi_1(F)$. El teorema de Van Kampen implica que $i_* : \pi_1(N) \to \pi_1(F)$ es un monomorfismo y por lo tanto es un isomorfismo. Falta ver que cada componente de $F - N$ es homeomorfa a un anillo.

La abelianizacion de un grupo G es el cociente de G por el subgrupo generado por los conmutadores $aba^{-1}b^{-1}$ para $a, b \in G$. Como cada homomorfismo de G a un grupo abeliano debe enviar los conmutadores a la identidad, todo homomorfismo de G a un grupo abeliano se factoriza a travez de su abelianizacion, y la abelianización es el cociente abeliano mas grande de G.

Teorema de Hurewicz $H_1(X)$ es la abelianización de $\pi_1(X)$.

Dem. Hay un homomorfismo natural $\phi : \pi_1(X) \to H_1(X)$: cada lazo en X representa un ciclo en X y dos lazos homotópicos representan ciclos homólogos. El producto de dos lazos representa a la suma de los ciclos.

ϕ es un epimorfismo ya que cada 1-ciclo en X es homólogo a un ciclo formado por simplejos singulares cuyas fronteras están en el punto base de X, y este ciclo es homólogo a uno formado por un solo simplejo singular.

Afirmamos que el kernel de ϕ es el subgrupo conmutador de $\pi_1(X)$. Como $H_i(X)$ es abeliano, $\phi(aba^{-1}b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1}\phi(b)^{-1} = 1$ asi que el subgrupo conmutador de $\pi_1(X)$ está contenido en el kernel de ϕ.

Falta ver que si un lazo $l : [0, 1] \to X$ representa al ciclo trivial en $H_1(X)$ entonces es l homotópico a una concatenación de lazos $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$ Como l es homologa a 0, existe una cadena $c = \sum \sigma_i$ cuya frontera es l. Las caras de los σ_i's, con excepcion de la que da l, se aparean en X, por lo que podemos juntar a los σ_i's para formar una superficie orientable singular S en X cuya frontera es l. S es un disco o una suma de toros con un hoyo. En el primer caso la frontera es un lazo trivial, en el segundo caso la frontera es homotópica al producto de los conmutadores de los generadores de los toros.

Problemas

16. Si S y S' son dos superfices cerradas y $\pi_1(S) \simeq \pi_1(S')$ entonces S y S' son homeomorfas.

17. Da un isomorfismo explicito entre los grupos $\langle x, y/xyxy^{-1} = 1 \rangle$ y $\langle a, b/a^2b^2 = 1 \rangle$.

18. Las únicas superficies compactas con grupos fundamentales abelianos son S^2, P^2 y T^2.

19. La única superficie cuyo grupo fundamental tiene elementos de orden finito es el plano proyectivo.

20. Si F es una superficie abierta con $\pi_1(F) \simeq \mathbb{Z}$, entonces F es homeomorfa al interior de un anillo o de una banda de Moebius.

21. Hay una correspondencia biunívoca entre clases de homotopía libre de curvas en una superficie F y clases de conjugación de $\pi_1(S)$.

Algunos problemas de repaso

22. Si S es una superficie compacta y c y c' son componentes de ∂S entonces existe un homeomorfismo de S que lleva c a c'.

23. Si S es una superficie y $p : \bar{S} \to S$ es una cubierta ¿es cierto que $p* : H_1(\bar{S}) \to H_1(S)$ es inyectiva o suprayectiva?

24. Demuestra que existen una infinidad de curvas simples no isotopicas en el toro, pero no en la botella de Klein.

25. Si S es una superficie abierta y $H_1(F) = 0$, entonces F es homeomorfa a $\mathbb{R}^2$.

26. Dos superficies compactas con grupos fundamentales isomorfos y no triviales son homotópicamente equivalentes.