3-variedades

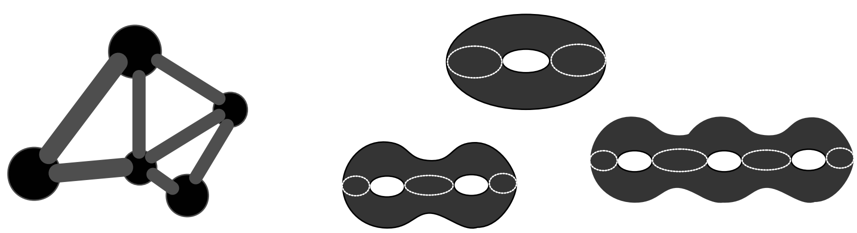
Una **3-variedad** es un espacio topológico hausdorff y con base numerable localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^3$. Una **3-variedad con borde** es un espacio topológico (hausdorf y con base numerable) localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^{3+}$. El **borde** de M, denotado por ∂M, esta formado por los puntos de M que no tienen vecindades homeomorfas a $\mathbb{R}^3$.

Las variedades compactas y sin borde se llaman **cerradas** y las variedades no compactas y sin borde se llaman **abiertas**.

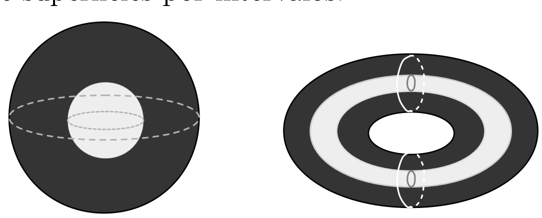
Los ejemplos mas simples de variedades abiertas son los abiertos de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplos de variedades con borde:

- El toro sólido: $D^2 \times S^1 \simeq D^2 \times [0,1]/_{(z,0)\sim(z,1)}$.
- La botella de Klein sólida: $D^2 \times [0,1]/_{(z,0)\sim(\bar{z},1)}$.
- Los **cubos con asas**: se obtienen uniendo bolas slidas por medio de cilindros sólidos (los pegados pueden preservar o invertir la orientación). Un cubo con n asas orientable es homeomorfo a un n-toro sólido:



- Los **productos** de superficies por intervalos.



- Los **haces de intervalos** sobre una superficie, por ejemplo:
  - El toro sólido es un haz de intervalos sobre la banda de Moebius.
  - La botella de Klein sólida es un haz de intervalos sobre un anillo.

Ejemplos de variedades cerradas:

- La **esfera tridimensional** S^3 puede verse como:

  - La compactificación por un punto de $\mathbb{R}^3$

  - La esfera unitaria en $\mathbb{R}^4$ = Los cuaternios unitarios.

  - La unión de dos bolas sólidas pegadas por el borde.

  $\pi_1(S^3) = 0 = H_1(S^3) \quad H_2(S^3) = 0 \quad H_3(S^3) = \mathbb{Z}.$

- El **toro tridimensional** T^3 puede verse como:

  - El producto de 3 círculos $S^1 \times S^1 \times S^1$

  - Un cubo con lados opuestos identificados.

  - El cociente de $\mathbb{R}^3$ por $\mathbb{Z}^3$

  $\pi_1(T^3) = \mathbb{Z}^3 = H_1(T^3) \quad H_2(T^3) = \mathbb{Z}^3 \quad H_3(T^3) = \mathbb{Z}$

- El **espacio proyectivo** P^3 es:

  - El cociente de S^3 por el mapeo antípoda.

  - El espacio de todas las lineas por el origen en $\mathbb{R}^4$.

  $\pi_1(P^3) = \mathbb{Z}_2 \quad H_1(P^3) = \mathbb{Z}_2 \quad H_2(P^3) = 0 \quad H_3(P^3) = \mathbb{Z}$

- Los **haces de esferas** sobre S^1 son:

  - $S^2 \times S^1 = S^2 \times [0,1]/_{(x,0)\sim(x,1)}$
  - $S^2 \widetilde{\times} S^1 = S^2 \times [0,1]/_{(x,0)\sim(-x,1)}$

  $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z} = H_1(S^2 \times S^1) \quad H_2(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z} \quad H_3(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$
  $\pi_1(S^2 \widetilde{\times} S^1) = \mathbb{Z} = H_1(S^2 \widetilde{\times} S^1) \quad H_2(S^2 \widetilde{\times} S^1) = 0 \quad H_3(S^2 \widetilde{\times} S^1) = 0$

- Los **haces de superficies** sobre S^1, que son:

  - Los productos $F \times S^1$.
  - $F \times [0,1]/_{(x,0)\sim(hx,1)}$ donde h es un homeomorfismo de F.

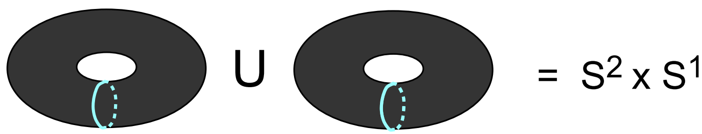
- Los **haces de círculos** sobre superficies, por ejemplo:

  - Los productos $F \times S^1$.
  - El haz de vectores unitarios tangentes a una superficie F.

Si dos variedades M y M' tienen bordes homeomorfos y $h : \partial M \to \partial M'$ es un homeomorfismo entonces podemos identificar sus bordes para obtener una variedad cerrada $M \cup_h M'$. La forma topológica de $M \cup M'$ sólo depende de la clase de isotopía de h.

Ejemplos:

- Al pegar dos bolas por cualquier homeomorfismo de los bordes se obtiene S^3.
- Al pegar dos toros sólidos $D^2 \times S^1$ por el homeomorfismo identidad en el borde $S^1 \times S^1$ se obtiene $S^2 \times S^1$.



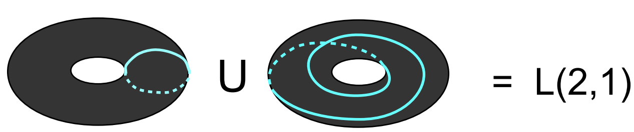
- Al pegar dos toros sólidos $D^2 \times S^1$ por el homeomorfismo que invierte los factores en $S^1 \times S^1$ se obtiene S^3.

Espacios lente.

Hay una infinidad de homeomorfismos no isotópicos del toro $S^1 \times S^1$ (tantos como isomorfismos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) que podemos usar para construir variedades pegando 2 toros sólidos.

Las rectas con pendientes racionales en el plano se proyectan a curvas simples en el toro: las de pendiente $1/0$ se proyectan a meridianos del toro y las de pendiente $0/1$ se proyectan a longitudes. Las rectas de pendiente p/q (con p, q primos relativos) se proyectan a curvas que dan p vueltas alrededor de la longitud y q veces alrededor del meridiano del toro.

El **espacio lente** $L(p, q)$ es el resultado de pegar dos toros sólidos por medio de un homeomorfismo que envia al meridiano del primer toro a la curva con pendiente p/q en el segundo.

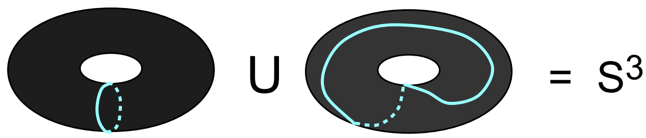


Aunque la imagen del meridiano no determina el homeomorfismo de pegado, si determina la forma topologica de la unión de los dos toros sólidos:

El primer toro solido es la unión de dos bolas: una es la vecindad $D^2 \times I$ del disco cuya frontera es el meridiano y la otra es el resto es toro solido. Si empezamos por pegar la vecindad del disco al segundo toro solido, obtenemos una variedad cuyo borde es una esfera, a la que aun tenemos que pegarle la otra bola. Pero el resultado de pegarle una bola a una variedad a lo largo de una esfera no depende del homeomorfismo de pegado. C el grupo fundamental no cambia al pegar la bola entonces el grupo de $L(p, q)$ se obtiene del grupo det segundo toro sólido, que es $\mathbb{Z}$, añadiéndole la relación que dice que la imagen del primer meridiano es trivial, (porque es borde de un disco en el primer toro), por lo tanto:

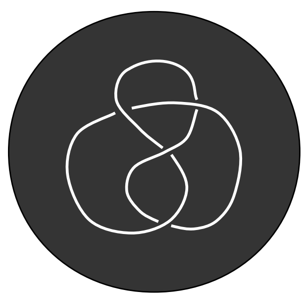
$\pi_1(L(p,q)) \simeq \mathbb{Z}_p$

Así que ni el grupo fundamental ni los grupos de homología distinguen a $L(p,q)$ de $L(p,q')$. $L(p,q) \simeq L(p,q+np)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ pero no es claro en que otros casos $L(p,q)$ puede ser homeomorfo a $L(p,q')$.



Nudos

Los nudos son una fuente muy importante de ejemplos de 3-variedades. Si k es un nudo en S^3, el complemento de k es la variedad abierta $S^3 - k$. El **exterior** del nudo k es la variedad con borde que se obtiene quitándole s S^3 una vecindad tubular abierta de k.



Se puede mostrar que para cualquier nudo k, $H_1(S^3 - k) \simeq \mathbb{Z}$ y $H_2(S^3 - k) \simeq 0$ asi que la homología no puede distinguir entre distintos complementos de nudos.

Si k es un nudo en S^3, podemos obtener muchas variedades cerradas quitándole a S^3 una vecindad tubular de k y volviéndola a pegar de otra manera (es decir, pegándole al exterior de k un toro sólido por medio de algun homeomorfismo del toro). A esta operacón se le llama **cirugía** en k, y como antes, el resultado sólo depende como se pegue el meridiano del toro sólido.

Si k_1 y k_2 son dos nudos en S^3, podemos pegar el exterior de k_1 con el exterior de k_2 por medio de cualquier homeomorfismo entre sus bordes, que son toros, para obtener una variedad cerrada. Si pegamos los exteriores de manera que el meridiano de k_1 se pegue con la longitud de k_2 y viceversa, obtenemos una variedad cuyos grupos de homología son iguales a los grupos de homolog;ia de S^3, es decir una **esfera homológica**.

Definiciones. Si M es una 3-variedad y S una superficie encajada en M entonces:

- S esta **propiamente encajada** en M si $S \cap \partial M = \partial S$.
- Una **vecindad regular** de S es una vecindad N homeomorfa a un haz de intervalos sobre S (si S tiene borde pedimos además que $N \cap \partial M$ sea una vecindad regular de ∂S en ∂M).
- Decimos que S **tiene dos lados** en M si S separa a su vecindad regular, y que S tiene **un lado** en M si no la separa (que S separe o no depende únicamente de que el haz de intervalos sea trivial o no).
- Cortar a M por S significa quitarle a M el interior de una vecindad regular de S. Al resultado se le denota por $M|_S$. Observar que si S tiene dos lados entonces $M|_S$ es una variedad cuya frontera contiene 2 copias de S, y si las identificamos de la manera obvia obtenemos una variedad homeomorfa a M.

Problemas

1. Una 3-variedad compacta es homeomorfa a un cubo con asas si y solo si existen discos ajenos propiamente encajados en M que cortan a M en una bola.
2. Todos los cubos con n asas que no son orientables son homeomorfos.
3. El espacio proyectivo es la unión de un haz de intervalos con una bola sólida.
4. Muestra que el espacio proyectivo es orientable y calcula sus grupos de homología.
5. Existen superficies con borde F y F' que no son homeomorfas tales que $F \times [0,1]$ y $F \times [0,1]$ si son homeomorfas.
6. Demuestra que si F y F' son superficies cerradas y $F \times S^1$ y $F' \times S^1$ son homeomorfas entonces F y F' son homeomorfas. ¿Ser cierto para superficies con borde?
7. Demuestra que $T^2 \times [0,1]/_{(x,y,0)\sim(-y,x,1)}$ no es homeomorfa a T^3.
8. En una 3-variedad M , cada elemento de $H_2(M)$ puede representarse con una colección de superficies cerradas, orientables y sin intersecciones.