

Topología de \mathbb{R}^3

El Teorema de Jordan tiene una generalización natural a 3 dimensiones:

Teorema. Cada superficie cerrada corta a \mathbb{R}^3 en 2 componentes conexas.

La demostración para superficies suaves o poligonales es análoga a la demostración del teorema de Jordan en el plano, hay que elegir una dirección d en el espacio en la cual todas las líneas corten a la superficie en un número finito de puntos y definir $i : \mathbb{R}^3 - S \rightarrow \{0, 1\}$ donde $i(p)$ es el número de veces que el rayo que empieza en p y va en la dirección d cruza a S , módulo 2. Se muestra que esta función es continua y toma los dos valores 0 y 1, así que el dominio tiene al menos 2 componentes conexas. Para ver que no hay más de 2, hay que observar que la vecindad regular de S tiene a lo más dos fronteras, y que cada punto de $\mathbb{R}^3 - S$ puede unirse a alguna de estas sin cruzar a S . La demostración para esferas topológicas requiere homología.

El Teorema de Schoenflies no puede generalizarse a \mathbb{R}^3 : existen esferas topológicas que no pueden deformarse para convertirse en esferas redondas.

Ejemplo. La esfera cornuda de Alexander.

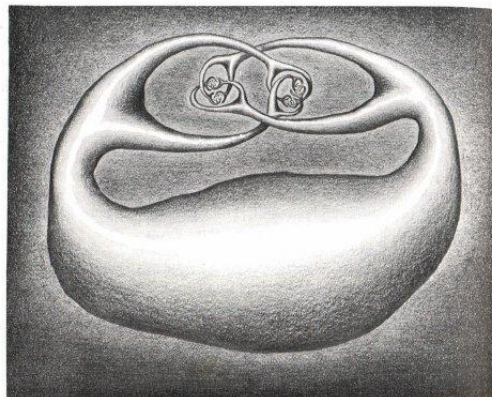


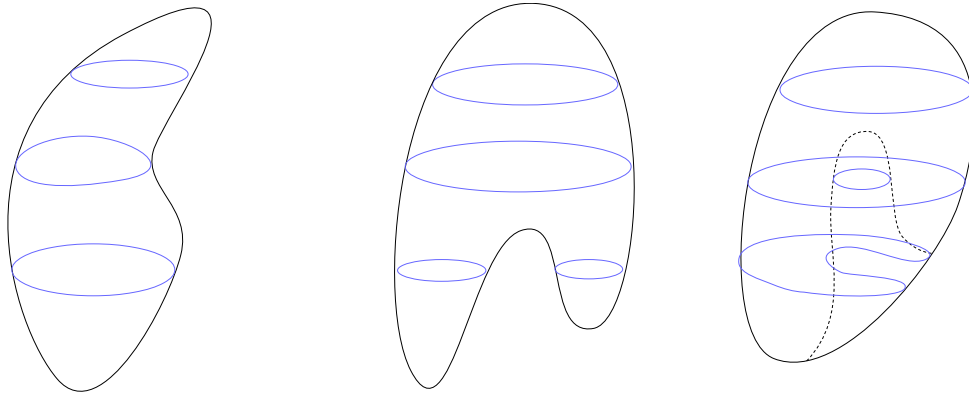
FIG. 4-11. The Alexander horned sphere.

El exterior de la esfera cornuda no es simplemente conexo, así que no corresponde al exterior de una bola redonda. Si le aplicamos una inversión obtenemos una esfera que no bordea una bola.

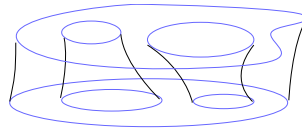
Pero el teorema de Schoenflies si vale para esferas suaves:

Teorema (Alexander). Todas las esferas suaves S en \mathbb{R}^3 pueden deformarse a esferas redondas. En particular, todas bordean bolas.

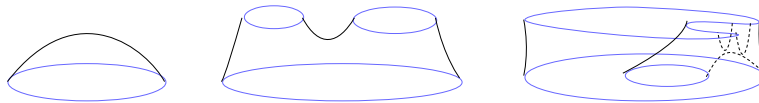
Demostración. Si S es una esfera suave en \mathbb{R}^3 , podemos deformar a S ligeramente para que esté en posición de Morse, es decir, que la función altura $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ tenga un número finito de puntos críticos no degenerados y que estos queden a distintas alturas. Para cada valor regular (no crítico) de h , $h^{-1}(t)$ es una colección de curvas simples y ajenas, y en cada valor crítico, $h^{-1}(t)$ tiene un punto singular, que es un máximo, un mínimo o un punto silla.



Al variar t sin pasar por un valor crítico, las curvas $h^{-1}(t)$ se deforman continuamente. Así que los pedazos de la esfera entre dos planos que no contienen puntos críticos son productos:



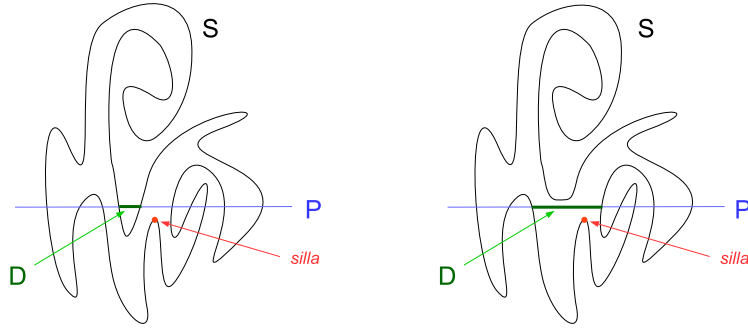
Al pasar por un valor crítico solo pueden pasar 4 cosas: una curva se convierte en un punto y desaparece, o aparece un punto y se convierte en una curva, o una curva se parte en dos curvas o dos curvas se fusionan en una curva. Así que cada pedazo de la esfera entre dos planos tiene una de las siguientes formas (pero puede estar de cabeza):



Si una esfera solo tiene 2 puntos críticos deben ser un mínimo y un máximo, y las curvas de nivel entre ellos se deforman desde que aparecen en uno hasta que desaparecen en el otro, así que la esfera bordea una bola.

Si hay más de 2 puntos críticos algunos deben ser puntos silla (si no las hubiera cada mínimo solo podría conectarse con un máximo y esa sería toda la esfera).

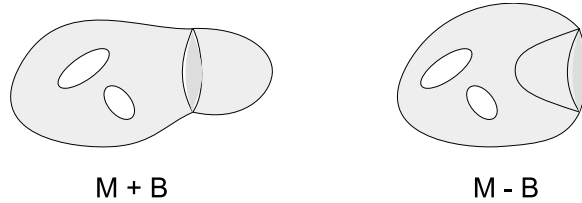
Tomemos un plano horizontal P despues del primer punto silla. La esfera intersecta a P en curvas simples y cada una de estas curvas corta a la esfera en dos discos. Si tomemos una curva c que no tenga otras curvas adentro, c bordea un disco en P que solo toca a S en el borde. Podemos pegarle D a los dos discos en que c parte a S para obtener dos esferas suaves por pedazos S' y S'' , y estas pueden suavizarse anadiendo unicamente un maximo o un minimo a cada una, y los puntos silla de S' y S'' son los puntos silla de S . Si S' (o S'') no tiene puntos silla, entonces solo tiene un maximo y un minimo y bordea una bola, y S'' tiene los mismos puntos críticos que S , pero tiene una curva de intersección menos con P . Si repetimos el procedimiento llegara un momento en que no queden mas intersecciones con P o que ambas esferas tengan puntos sillars.



Si las dos esferas S' y S'' tienen sillars, cada una tiene menos que S y por hipótesis de inducción cada una bordea una bola

Como las esferas S' y S'' bordean bolas B' y B'' , y ademas S' y S'' se tocan en un disco, el siguiente lema muestra que S debe bordear un a bola:

Lema. La forma topológica de una 3-variedad con borde no cambia si le pegamos una bola que toca al borde en un disco, o si le quitamos una bola que toca al borde en un disco.



Corolario. Cada esfera suave divide a S^3 en dos bolas sólidas.

Corolario. Cada par de esferas suaves y ajenas en S^3 bordean un producto $S^2 \times [0, 1]$

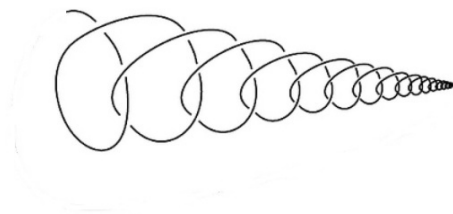
Demostración. Tomemos un arco suave a que conecte a las dos esferas S_0 y S_1 y las toque transversalmente en un punto. Sea A una vecindad regular del arco, es decir, $A = D^2 \times [0, 1]$ con $a = 0 \times [0, 1]$, $A \cap S_0 = D^2 \times 0$ y $A \cap S_1 = D^2 \times 1$.

$(S_0 - D^2 \times 0S_0) \cup (\cup S_1 - D^2 \times 1) \cup (\partial D^2 \times [0, 1])$ es una esfera suave por pedazos en S^3 , por lo que es el borde de una bola B . A y B son bolas sólidas y $A \cap B$ es un anillo, entonces $A \cup B$ es homeomorfa a $D^2 \times [0, 1] \cup D^2 \times [0, 1] /_{(x,0) \sim (x,1)}$ para $x \in \partial D^2 \simeq S^2 \times [0, 1]$. •

Corolario. Dadas dos esferas suaves en S^3 , existe una isotopia de S^3 que envía una a otra.

Ojo: En \mathbb{R}^3 existen planos suaves que no pueden deformarse a planos euclidianos. Estos deben tener una cantidad infinita de puntos críticos en cualquier dirección, si no la demostración anterior mostraría que podemos quitarlos hasta que no hallan puntos silla y el plano solo tiene un máximo o un mínimo.

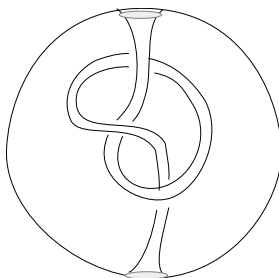
Ejemplo. El arco salvaje de Fox y Artin.



Este es un arco salvaje (que no puede enderezarse a un arco de recta), que es suave en todos sus puntos menos uno. Si lo engordamos de modo que se vaya haciendo más delgado al acercarse a ese punto obtenemos una bola que contiene al arco, menos el punto, en su interior. La frontera de la bola es una esfera que es suave en todos los puntos menos uno. Si empujamos el punto al infinito, lo que queda es un plano (una esfera menos un punto) que es suave, pero no puede enderezarse.

Uno puede tratar de generalizar el teorema de Schoenflies para superficies (suaves) distintas de la esfera, y preguntarse por ejemplo, si todo toro suave en \mathbb{R}^3 podrá deformarse para convertirse en un toro estándar.

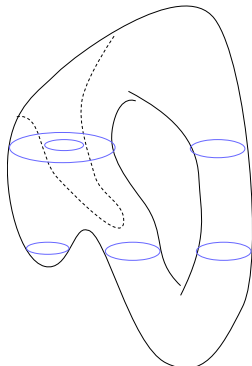
Ejemplo. Un toro suave en \mathbb{R}^3 que no es el borde de un toro sólido:



Lo que está dentro del toro es el exterior de un nudo.

Teorema (Alexander). Cada toro suave en S^3 bordea un toro sólido al menos de un lado.

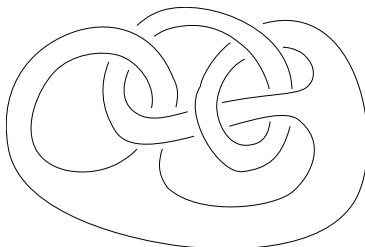
small La demostración es similar a la del teorema para esferas: hay que poner al toro T en posición de Morse, y observar que si T tiene solo un máximo, un mínimo y 2 sillars (lo mínimo posible para un toro) entonces es un toro estandar, que bordea un toro sólido. Si tiene mas sillars, hay que encontrar un plano P que deje una silla abajo y una arriba, P cruza a T en curvas simples y ajenas que separan al plano. Si c es una curva en $P \cap T$ entonces, c puede separar a T en un toro agujerado y un disco, o c no separa T .



Si c no encierre a ninguna otra curva en T , entonces es el borde de un disco D en T que solo toca a T en c , y podemos cortar a T usando D para obtener una esfera S' y un toro T' (si c separa a T) o una esfera S (si c no separa a T). Por el teorema de Alexander las esferas bordean bolas, y (por inducción sobre el número de sillars y el número de curvas de intersección con P), podemos suponer que T' bordea un toro sólido de algun lado. En el primer caso las 2 regiones bordeadas por T en S^3 se obtienen de las dos regiones bordeada por T' pegándoles o quitándoles las bolas bordeadas por S' . En el segundo caso, S bordea 2 bolas B y B' y una de ellas, digamos B , no contiene al disco D . Una de las regiones bordeadas por T en S^3 se obtiene pegandole a B una vecindad $D \times [-1, 1]$ de D (esto es un toro sólido) y la otra se obtiene quitandole a B' la vecindad $D \times [-1, 1]$ de D (este es el exterior de un nudo). •

El Teorema de Alexander no se puede generalizar a superficies de género mayor que 1: existe un doble toro en S^3 que no bordea un doble toro sólido de ningun lado (Tarea).

Ojo: Saber si una superficie cerrada en S^3 puede deformarse para ponerse en la la posición estandar no es tan facil. Este doble toro bordea un doble toro sólido en cada lado:



Variedades suaves.

Cada variedad topológica M está cubierta por abiertos A_1, A_2, A_3, \dots , de \mathbb{R}^n tales que para cada A_i existe un abierto B_i de \mathbb{R}^n y un homeomorfismo $h_i : A_i \rightarrow B_i$. Los h_i 's dan coordenadas locales para los puntos de M . Si A_i y A_j se intersectan, el cambio de coordenadas $h_j \circ h_i^{-1}$ da un homeomorfismo entre los abiertos $h_i^{-1}(A_i \cap A_j)$ y $h_j^{-1}(A_i \cap A_j)$ de \mathbb{R}^n .

Así que podemos pensar en cada variedad como una unión de abiertos B_i de \mathbb{R}^n que están identificados parcialmente por homeomorfismos. Hay muchos homeomorfismos posibles entre dos abiertos de \mathbb{R}^n , así los homeomorfismos de pegado pueden ser sumamente complicados.

Una **variedad suave** es una variedad topológica cubierta por abiertos A_1, A_2, A_3, \dots con una elección de coordenadas locales de modo que los cambios de coordenadas sean funciones suaves (es decir, que los homeomorfismos de pegado entre los abiertos de \mathbb{R}^n sean funciones suaves).

En una variedad suave tiene sentido hablar de funciones diferenciables y se valen resultados como que las funciones continuas se pueden aproximar por funciones diferenciables. También es posible usar las herramientas de la topología diferencial, como la transversalidad y las funciones de Morse.

Teorema (Moise). Cada 3-variedad topológica es homomorfa a una 3-variedad suave.

Este teorema es bastante difícil de probar, y no vale en dimensiones mayores que 3: hay 4-variedades topológicas que no son homeomorfas a variedades suaves (en los que los pegados no se pueden suavizar).

A partir de este momento asumiremos sin decirlo que todas las variedades son suaves y que todos los encajes de curvas y superficies son suaves.

Triangulaciones.

Una **triangulación** de una 3 variedad M es una subdivisión de M en tetraedros que se tocan en caras, aristas o vértices.

Teorema. Todas las 3-variedades (suaves) son triangulables.

Idea de la demostración. M puede cubrirse con una colección de bolas abiertas A_1, A_2, A_3, \dots , y dentro de ellas hay bolas cerradas (de un radio un poco menor) B_1, B_2, B_3, \dots cuyos interiores aun cubren a M . Podemos suponer que esta colección es localmente finita, de modo que cada bola intersecta solo a una cantidad finita de bolas. Los bordes de estas bolas son esferas suaves, que podemos deformar para que se intersecten transversalmente en un número finito de curvas. Así que

la unión de las esferas divide a M en regiones cerradas que son pedazos de bolas, bordeadas por superficies suaves por pedazos.

Afirmamos que si R es una región compacta de \mathbb{R}^3 cuyo borde es una superficie suave por pedazos, entonces R es una unión de bolas pegadas por discos. Esto es así porque ∂R es una superficie suave por pedazos y podemos acomodarla en posición de Morse. Si cortamos a R por planos horizontales, uno entre cada par de valores críticos, entonces los pedazos que quedan son homeomorfos a productos de discos agujerados por intervalos, y esto pueden cortarse por rectángulos para obtener bolas.

Así que M es la unión de bolas cerradas C_1, C_2, C_3, \dots que se tocan en sus bordes. Podemos dividir los bordes en triángulos, y subdividir a las bolas desde el centro para obtener tetraedros que se tocan en caras, aristas y vértices •

Corolario. Todas las 3-variedades compactas pueden obtenerse de poliedros convexos identificando sus caras por pares.

Demostración. Sea T_1 un tetraedro de la triangulación, si no cubre a toda M hay otro tetraedro T_2 adyacente a una cara de T_1 , si $T_1 \cup T_2$ no cubre a M hay otro tetraedro T_3 adyacente a una cara de T_1 o de T_2 , si $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ no cubre a M hay otro tetraedro T_4 adyacente a una cara de T_1, T_2 o T_3 , etc. Como M es compacta el número de tetraedros es finito. Unamos los T_i de modo que cada uno este pegado sólomente con uno anterior por una cara común, la unión será una bola sólida cuyo borde es una esfera topológica dividida en triángulos topológicos. •

Corolario. Cada 3-variedad cerrada es unión de dos cubos con asas pegados por sus bordes.

Demostración. Si M es una 3-variedad triangulada, la vecindad regular de la gráfica formada por los vértices y las aristas de la triangulación es un cubo con asas. Y su complemento es otro cubo con asas, ya que es una vecindad regular de la gráfica cuyos vértices son los centros de los tetraedros y cuyas aristas conectan a los centros de los tetraedros que tienen una cara en común. •

Una **descomposición de Heegaard** de una 3-variedad M es una descomposición de M como unión de dos cubos con asas H_1 y H_2 pegados por los bordes, su género es el género de los cubos con asas. El **género de Heegaard** de M es el mínimo género de las descomposiciones de Heegaard de M .

Ejemplos.

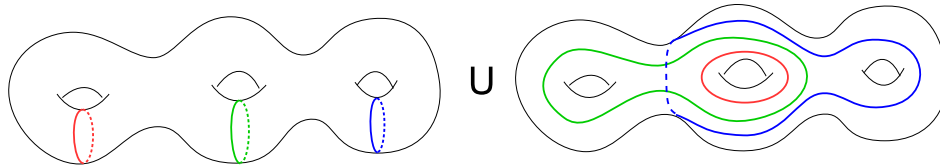
- S^3 tiene descomposiciones de Heegaard de todos los géneros (Tarea).
- La única 3-variedad con genero de Heegaard 1 es S^3 .
- El genero de Heegard de $S^2 \times S^1$ es 2.

Cada descomposición de Heegaard esta determinada por el homeomorfismo de pegado entre los 2 cubos con asas, y cualquier homeomorfismo de pegado corresponde a una descom-

posición de alguna variedad. Dos homeomorfismos iso'topicos producen variedades homeomorfas, pero hay homeomorfismos distintos que producen la misma variedad.

Para saber el resultado de pegar dos cubos con asas basta saber a que curvas de ∂H_2 se pegan los 'meridianos' de ∂H_1 , (los meridianos son curvas que bordean discos en H_1 y que cortan a H_2 en una bola). Esto es así porque podemos empezar por pegarle a H_2 las vecindades de los discos, y ya solo falta por pegar una bola sólida.

Los meridianos pueden ir a dar a cualquier colección de curvas en ∂H_2 que corten a en una esfera con hoyos:



Corolario. Si M es una 3-variedad cerrada entonces $\pi_1(M)$ tiene una presentación con el mismo número de generadores y relaciones.

Demostración. M es la unión de dos cubos con n asas H_1 y H_2 . Podemos ir armando a M paulatinamente, empezando con H_1 , pegándole las vecindades de los n discos que cortan a H_2 en una bola y finalmente pegando la bola. El grupo fundamental de H_1 es libre en n generadores y por el teorema de Van Kampen cada disco engordado que añadimos agrega una relación al grupo. Y al pegar la bola restante el grupo no cambia, ya que se pega por una esfera. •

Característica de Euler.

La **característica de Euler** de una 3-variedad triangulada es $\chi(M) = v - a + c - t$ donde $v = \#v'$ ertices, $a = \#aristas$, $c = \#caras$ y $t = \#tetraedros$ de la triangulación.

Teorema. La característica de Euler de una 3-variedad (suave) no depende de la triangulación.

Una manera de demostrar esto sería ver que al refinar una triangulación la característica no cambia (bastaría mostrar que al subdividir un tetraedro en tetraedritos su característica no cambia, pero esto no es obvio). Pero faltaría mostrar que dadas dos triangulaciones es posible mover una para que las las dos tengan una subdivisión común (esto es fácil si las triangulaciones son suaves, pero muy difícil si las triangulaciones son topológicas).

La demostración formal usa topología algebraica: se prueba que para cualquier complejo simplicial K de dimensión 3, $\chi(K) = rk(H_0(K)) - rk(H_1(K)) + rk(H_2(K)) - rk(H_3(K))$ y el resultado se sigue de que los grupos de homología singular son invariantes topológicos. •

Corolario. Si M es una 3-variedad cerrada entonces $\chi(M) = 0$. Si M es una 3-variedad con borde, $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\partial M)$.

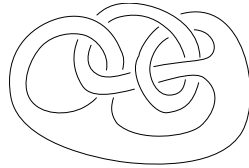
Demostración. Si M es una 3-variedad cerrada, entonces para la triangulación de M formada por v vértices, a aristas, c caras y t tetraedros, la subdivisión dual está formada por t vértices, c aristas, a caras y v poliedros. Como la característica no depende de la subdivisión, $\chi(M) = v - a + c - t = t - c + a - v = -\chi(M)$ por lo tanto $\chi(M) = 0$. Si M es una 3-variedad con borde y la reflejamos en ∂M para obtener una variedad cerrada DM entonces $\chi(DM) = \chi(M) + \chi(M) - \chi(\partial M)$, así que $0 = 2\chi(M) - \chi(\partial M)$. •

Lema. El espacio E obtenido al identificar por pares todas las caras de un poliedro P es una 3-variedad cerrada si y solamente si $\chi(E) = 0$.

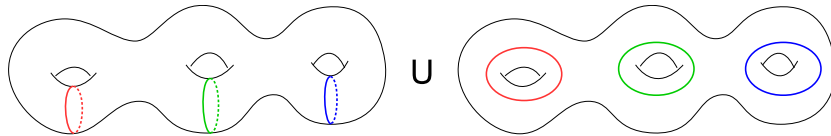
Demostración. Cada punto de E que no viene de un vértice de P tiene una vecindad homeomorfa a una bola abierta: Los puntos del interior de P tienen vecindades homeomorfas en E , los puntos en las caras de P tienen vecindades que son medias bolas y que al pegarse en E forman una bola, y los puntos en las aristas de P tienen vecindades que son como gajos, que al pegarse en E también forman una bola. Los vértices de P tienen vecindades que son trozos de una bola, pero al pegarse en E estos no necesariamente forman una bola: sólo sabemos que forman un cono sobre la superficie que rodea al vértice en E , pero esta superficie no es necesariamente una esfera. El que todas las superficies que rodean a los vértices en E sean esferas o no, depende únicamente de la característica de Euler de E (Tarea). •

Problemas

1. Muestra que este doble toro bordea un doble toro sólido de cada lado.



- ¿Puedes dibujar uno que no bordee un doble toro sólido de ningún lado?
2. S^3 tiene descomposiciones de Heegaard de todos los géneros.
3. ¿Cuál es el género de Heegaard de T^3 ?
4. ¿Qué variedad es esta?



5. Demostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$ existen 3-variedades con genero de Heegaard mayor que n .
6. Demostrar que un poliedro con lados identificados por pares es una 3-variedad si y solo si la característica de Euler del resultado es 0.
7. Demuestra que no existe ninguna 3-variedad compacta cuyo borde sea un plano proyectivo. ¿Existirá una cuyo borde sea una botella de Klein?
8. Si una 3-variedad M se puede triangular con T tetraedros ¿cual es el mayor rango que puede tener $\pi_1(M)$?
9. Muestra que identificando las caras de un tetraedro se puede obtener S^3 . ¿Se podrán obtener otras 3-variedades cerradas?