

## Variedades irreducibles y variedades primas

Una 3-variedad  $M$  es **irreducible** si cada esfera (suave) en  $M$  es el borde de una bola.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}^3$  y  $S^3$  son irreducibles (por el teorema de Alexander)
- $S^2 \times [0, 1]$  y  $S^2 \times S^1$  no son irreducibles.

**Lema.** Si  $M$  es una 3-variedad cuya cubierta universal  $\tilde{M}$  es irreducible, entonces  $M$  es irreducible.

*Demostración.* Supongamos que  $M$  no es irreducible y sea  $S$  es una esfera que no bordea una bola en  $M$ . Como  $S$  es simplemente conexa, se levanta a  $\tilde{M}$ , de modo que la preimagen de  $S$  en  $\tilde{M}$  es una colección de esferas ajenas  $S_1, S_2, \dots$ . Como  $\tilde{M}$  es irreducible, cada  $S_i$  es el borde de una bola  $B_i$ , y debe existir una  $S_i$  que no contiene a ninguna otra  $S_j$  en su interior. Entonces  $B_i$  debe proyectarse inyectivamente a  $M$ , y su borde se proyecta inyectivamente a  $S$ , de modo que  $S$  bordea una bola en  $M$ .

**Corolario.** El 3-toro y todos los productos de superficies por círculos son irreducibles.

*Demostración.* La cubierta universal de estas variedades es  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $M$  y  $M'$  son dos 3-variedades, la **suma conexa** de  $M$  y  $M'$  es la variedad  $M + M'$  que se obtiene removiendo el interior de una bola (suave) de cada una y pegando las esferas que quedan por medio de un homeomorfismo. Como todo homeomorfismo de la esfera es isotópico a la identidad o al mapeo antípoda, el resultado sólo depende de que el homeomorfismo de pegado preserve o invierta la orientación.

**Lema.** La suma conexa de 3-variedades orientadas esta bien definida.

Dem. Hay que ver que la suma  $M + M'$  no depende de las bolas que les quitamos a  $M$  y a  $M'$ . Para esto basta ver que si  $B$  y  $B'$  son dos bolas suaves en una variedad  $M$ , entonces hay un homeomorfismo de  $M$  que lleva  $B$  a  $B'$ . Si  $p$  y  $p'$  son puntos en el interior de  $B$  y  $B'$  respectivamente, entonces hay una bola  $B''$  en  $M$  que contiene a  $p$  y a  $p'$  en su interior. Como  $B$  es suave, existe un homeomorfismo  $h$  de  $M$  que convierte a  $B$  en una bola pequeña que contiene a  $p$  y está contenida en  $B''$ , y como  $B'$  es suave, existe un homeomorfismo  $h'$  de  $M$  que convierte a  $B'$  en una bola pequeña

que contiene a  $p'$  y está contenida en  $B''$ . Ahora  $h(B)$  y  $h'(B')$  son dos bolas suaves contenidas en el interior de la bola  $B''$ . Por el teorema de Schoenflies en 3-D, para cada par de bolas suaves en el interior de  $B''$ , hay un homeomorfismo  $g$  de  $B''$  que lleva una a la otra y que es la identidad en el borde de  $B''$ .  $g$  puede extenderse a un homeomorfismo de  $M$  definiéndolo como la identidad afuera de  $B''$ . La composición  $h^{-1} \circ g \circ h'$  da un homeomorfismo de  $M$  que lleva  $B'$  a  $B$ . •

Observar que si a una 3-variedad  $M$  le sumamos una 3-esfera obtenemos la misma variedad, y que sumarle a  $M$  una bola equivale a quitarle a  $M$  una bola del interior.

Decimos que una 3-variedad  $M$  es **prima** si no puede descomponerse como suma conexa de variedades distintas de  $S^3$ .

Ejemplos.

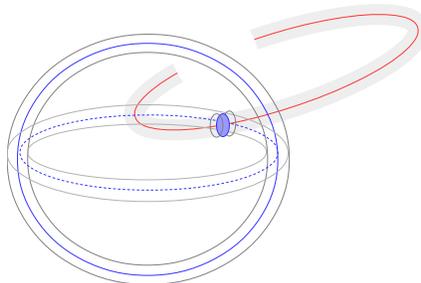
- Los teoremas de Jordan y Schoenflies en 3 dimensiones muestran que  $\mathbb{R}^3$  y  $S^3$  son primas.
- Los complementos de nudos en  $S^3$  son variedades primas (por que?).

**Afirmación.** Existen un número infinito de variedades primas cerradas no homeomorfas.

Demostración. Tarea.

**Lema.** Si una 3-variedad  $M$  contiene una esfera no separante, entonces  $M = M' + M_1$  donde  $M_1$  es un haz de esferas ( $S^2 \times S^1$  o  $S^2 \tilde{\times} S^1$ ).

*Demostración* Si  $S$  es una esfera no separante en  $M$  Por lo tanto hay una curva cerrada  $c$  en  $M$  que cruza a  $S$  en exactamente un punto.



La vecindad regular de  $S$  es un haz de intervalos, como  $S$  es simplemente conexa debe ser homeomorfa a  $S^2 \times S^1$ . Tomemos una vecindad regular  $N$  de  $S \cup c$ .  $N$  se obtiene pegándole a  $S^2 \times [-1, 1]$  un cilindro  $D^2 \times [-1, 1]$  así que (dependiendo de la orientación del pegado del cilindro)  $N$  es homeomorfo a  $S^2 \times S^1 - B^3$  o a  $S^2 \tilde{\times} S^1 - B^3$ . Como  $\partial N$  es una esfera separante, descompone a  $M$  como suma conexa de  $N \cup B^3$  y  $M - N \cup B^3$ . •

**Corolario.** Si una 3-variedad prima no es irreducible, entonces es  $S^2 \times S^1$  o  $S^2 \tilde{\times} S^1$ .

*Demostración* Si  $M$  es prima pero no es irreducible, entonces existe una esfera en  $M$  que no es separante, y por el lema anterior  $M$  tiene un sumando  $S^2 \times S^1$  o  $S^2 \tilde{\times} S^1$ , y como  $M$  es prima el otro factor debe ser  $S^3$ . •

Una pregunta natural es si cada 3-variedad se puede descomponer como suma de variedades primas. Por el Teorema de Van Kampen si  $M = M_1 + M_2$  entonces  $\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$ . Si  $M$  es compacta entonces el rango de  $\pi_1(M) = n$  es finito. Si nos creemos que el rango del producto libre de dos grupos es la suma de los rangos, entonces podemos decir que  $M$  no puede descomponerse como suma de mas de  $rk(\pi_1(M))$  variedades con grupos no triviales. Pero aún habría que descartar la existencia de 3-variedades cerradas distintas de  $S^3$  con  $\pi_1(M) = 0$ . El Teorema de Grushko muestra que el rango del producto libre es la suma de sus rangos y la Conjetura de Poincare dice que la unica variedad cerrada con  $\pi_1$  trivial es  $S^3$ , pero estos resultados no se conocían cuando Knesser demostró el siguiente teorema.

**Teorema (Knesser)** Cada 3-variedad compacta puede descomponerse como suma conexa de 3-variedades primas.

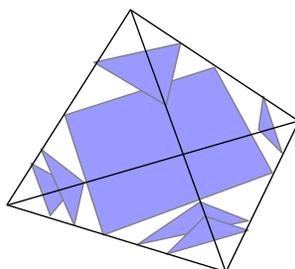
*Demostración* Si  $M$  contiene esferas no separantes entonces  $M$  puede descomponerse como  $M' + M_1$  donde  $M_1$  es un haz de esferas, si  $M'$  tiene esferas no separantes entonces  $M' = M'' + M_2$  donde  $M_2$  es un haz de esferas, etc. Las esferas no separantes deben acabarse ya que el primer grupo de homología de una suma conexa es la suma de los grupos de homología de los sumandos, y cada haz de esferas tiene grupo  $\mathbb{Z}$ , así que si  $H_1(M)$  tiene rango  $n$  no pueden haber mas de  $n$  esferas que no separen a  $M$ . Así que podemos suponer que todas las esferas en  $M$  son separantes.

Observar que si  $M$  es la suma conexa de  $n$  variedades,  $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$  distintas de  $S^3$ , entonces existen  $n - 1$  esferas ajenas en  $M$  que separan a  $M$  en  $n$  componentes conexas, homeomorfas a las  $M_i$  agujeradas (es decir,  $M_i$  menos el interior de una o mas bolas). Para probar que una variedad compacta tiene una descomposición prima, basta ver que hay una cota para el número de esferas ajenas en  $M$  que separen a  $M$  en componentes que no son bolas agujeradas (si hay una bola agujerada significa que uno de los sumandos es  $S^3$ ).

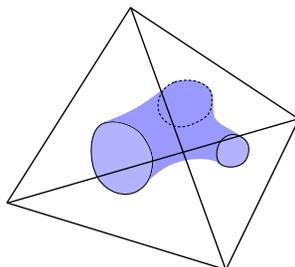
Para demostrar esto hay que elegir esferas en una posición especial.

Decimos que una superficie  $S$  en  $M$  está en **posición normal** respecto a una triangulación si  $S$  la interseca de modo que:

1.  $S$  no pasa por los vértices.
2.  $S$  cruza a las aristas en un número finito de puntos.
3.  $S$  cruza a cada triángulo de  $T$  en arcos, que unen distintos lados del triángulo.
4.  $S$  cruza a cada tetraedro en discos con 3 o 4 lados (triángulos y cuadrados).



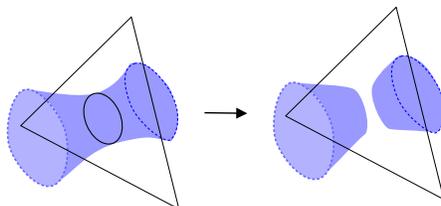
Cualquier superficie  $S$  encajada suavemente en  $M$ , puede moverse para que no pase por los vértices e intersecte transversalmente a las aristas de la triangulación. Así que  $S$  intersecta a cada arista en un número finito de puntos, e intersecta a cada triángulo en un número finito de curvas y arcos simples y ajenos. Pero la superficie puede intersectar a los interiores de los tetraedros en superficies muy complicadas, y no siempre puede deformarse para que cumpla las condiciones 3 y 4.



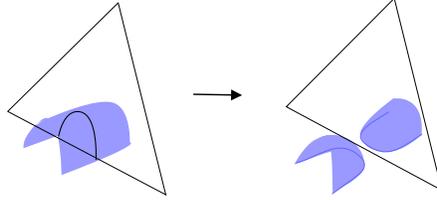
**Lema.** Si existe una familia de  $n$  esferas separantes en  $M$  cuyas regiones complementarias no son bolas agujeradas, entonces existe una familia de  $n$  esferas normales con la misma propiedad.

*Demostración.* Podemos suponer que la familia de esferas  $S_1, S_2, \dots, S_n$  es transversal a la triangulación y por lo tanto corta a cada triángulo en un número finito de curvas y arcos simples y cerrados. Veremos que si elegimos a las esferas de modo que corten mínimamente a la triangulación entonces las condiciones 3 y 4 se cumplen.

Paso 1. Sea  $c$  una curva de intersección entre  $\cup S_i$  y un triángulo  $\Delta$  que no tenga a ninguna otra curva en su interior. La curva  $c$  bordea un disco  $D$  en  $\Delta$  que solo toca a  $S_i$  en el borde, y  $c$  separa a  $S_i$  en dos discos  $D'$  y  $D''$ .  $D$  está en una de las componentes  $N_i$  de  $M|_{\cup S_i}$ , y la corta en dos pedazos  $N'_i$  y  $N''_i$ . Si  $N'_i$  y  $N''_i$  fueran bolas agujeradas entonces  $N_i$  también lo sería, contradiciendo la suposición inicial. Así que podemos suponer que  $N'_i$  no es una bola agujerada y podemos reemplazar a  $S_i$  por la esfera  $S'_i = D \cup D'$ .  $S'_i$  no es transversal a la triangulación, pero podemos empujarla un poco para que lo sea y tenga menos intersecciones con la triangulación que  $S_i$ . Este reemplazo afecta a dos componentes de  $M|_{\cup S_i}$ : a una le quita  $N''_i$  y a otra se la pega, así que se preserva la condición deseada. Repetir este paso hasta que las esferas no intersecten a ninguno de los triángulos en curvas cerradas.

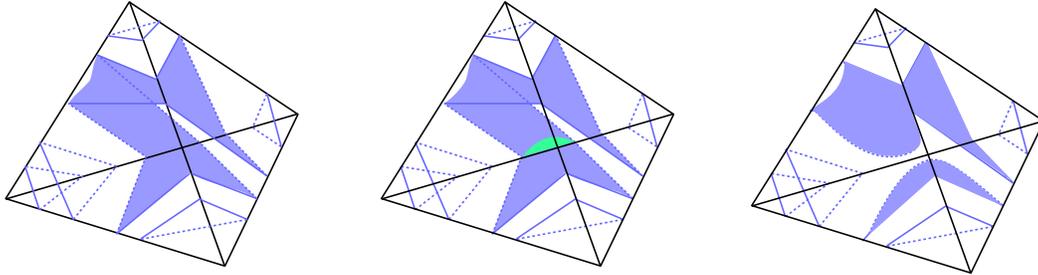


Paso 2. Ahora podemos suponer que todas las intersecciones entre las esferas y los triángulos son arcos simples. Si una esfera  $S_i$  interseca a un triángulo  $\Delta$  en un arco  $a_i$  que tiene sus dos extremos en el mismo lado  $l$  del triángulo, entonces hay un arco  $a_i$  que no contiene a ningún otro en su interior. Podemos deformar a  $S_i$  empujando a  $a_i$  hacia  $l$  hasta sacarlo de  $\Delta$ . Esto reduce el número de intersecciones de  $S_i$  con las aristas del triángulo  $\Delta$ . Observar que las intersecciones de  $S_i$  con los triángulos adyacentes a  $\Delta$  a lo largo de  $l$  cambian de forma, aunque el número de arcos no puede aumentar, alguno puede convertirse en una curva cerrada así que hay que repetir el paso 1. Repetir este paso (y de ser necesario, también el paso 1) hasta que todas las intersecciones de las esferas con los triángulos sean arcos que cruzan los triángulos.



Paso 3. Ahora queremos ver como intersecan las esferas al interior de un tetraedro  $T$ . Cada esfera  $S$  cruza a las fronteras de  $T$  en curvas simples cerradas, y cada curva simple cerrada bordea un disco en la frontera de  $T$ . Si una componente de  $S \cap T$  no fuera un disco, podríamos cortar a  $S$  por el disco en  $T$  para obtener dos esferas que intersecan menos veces a la triangulación.

Paso 4. Ahora sabemos que las esferas intersecan a los tetraedros en discos, pero estos discos pueden ser complicados si sus bordes cruzan varias veces a las caras del tetraedro:



Si una curva  $c$  en la frontera de  $T$  esta formada por mas de 4 arcos en sus caras, entonces el disco que bordea  $c$  en la frontera de  $T$  contiene un arco de una arista del tetraedro, y podemos empujar el disco bordeado por  $c$  en la esfera hacia ese arco para reducir el numero de intersecciones de la esfera con la arista. •

*Demostración de teorema.*

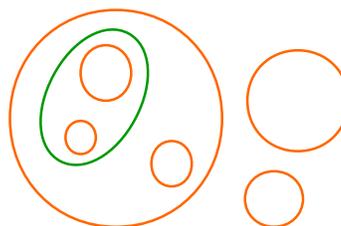
Asi podemos suponer que las esferas que descomponen a  $M$  como suma conexa son esferas normales  $S_1, S_2, \dots, S_n$  que cortan a  $M$  en  $n + 1$  regiones que no son bolas agujeradas. Estas regiones están formadas por trozos de los tetraedros cortados por los triángulos y cuadrados que forman las superficies normales, y los trozos son productos (triángulo  $\times$  intervalo o cuadrado  $\times$  intervalo) excepto por los 4 trozos de las esquinas, y 2 trozos que quedan entre los triángulos y los cuadrados, o entre triángulos no paralelos, si no hay cuadrados. Asi que si hay  $t$  tetraedros entonces hay a lo mas  $6t$  trozos que no son productos. Si  $n \geq 6t$ , entonces las esferas cortan a  $M$  en mas de  $6t$  regiones, por lo que al menos una de ellas está formada por productos y por lo tanto es un haz de intervalos. Como el borde del haz de intervalos son esferas, solo puede ser  $S^2 \times I$  o  $P^2 \tilde{\times} I$ . •

**Teorema. (Milnor)** La descomposición de una 3-variedad orientable en factores primos es única. Si la variedad no es orientable solo hay ambigüedad entre los factores  $S^2 \times S^1$  y  $S^2 \tilde{\times} S^1$ .

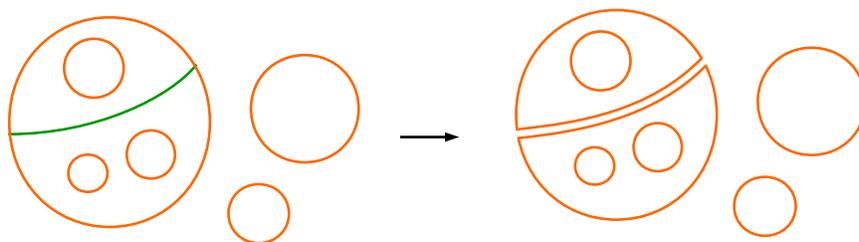
La demostración se basa en dos observaciones:

**Observación 1:** Si una colección de esferas ajenas separantes  $S_1, S_2, \dots, S_n$  dan una descomposición de  $M$  en variedades primas y añadimos algunas esferas ajenas más, obtenemos una descomposición de  $M$  en las mismas variedades primas y algunas 3-esferas.

Esto es así porque cada nueva esfera queda dentro de una variedad prima agujerada. Pero si separamos con una esfera a una variedad prima agujerada, debemos obtener la misma variedad prima (con más o menos agujeros) y una bola agujerada.



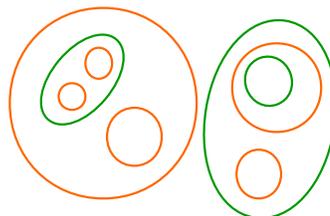
**Observación 2:** Si cortamos una de las esferas  $S_i$  por un disco para obtener dos esferas  $S'_i$  y  $S''_i$  y reemplazamos a  $S_i$  por esas dos esferas, obtenemos una descomposición de  $M$  en las mismas variedades primas y una 3-esfera.



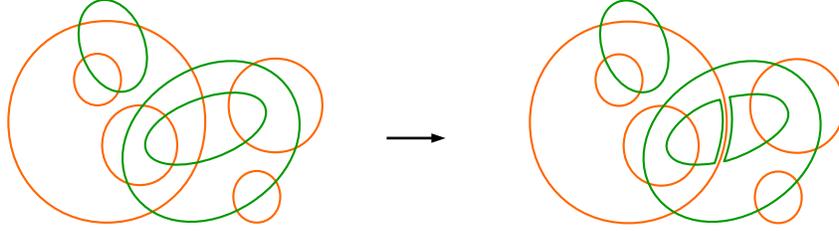
Esto es así porque al añadir las dos esferas  $S'_i$  y  $S''_i$  a la colección, cortamos a  $M$  en las mismas variedades primas agujeradas y dos bolas agujeradas más. Como la región entre  $S_i$ ,  $S'_i$  y  $S''_i$  es una bola con dos agujeros, al quitar a  $S_i$  de la colección esa región se pega a una de las variedades primas agujeradas, añadiéndole más agujeros.

Para demostrar el teorema, digamos que tenemos dos descomposiciones primas de  $M$ , una dada por esferas *naranjas* y otra dada por esferas *verdes*.

Si las esferas naranjas y verdes son ajenas, entonces por la observación 1 su unión da una descomposición de  $M$  en las variedades primas naranjas y algunas 3-esferas, y también da una descomposición en las variedades primas verdes y algunas 3-esferas. Así que las variedades primas naranjas y verdes son las mismas.



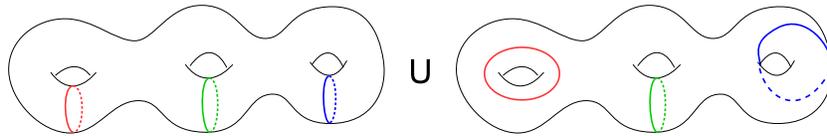
Si las esferas naranjas y verdes se intersectan, vamos a cambiar las esferas verdes para quitar una curva de interseccion sin cambiar la descomposicion.



Las esferas verdes intersectan a las naranjas en curvas simples cerradas ajenas, si  $c$  es una curva en una esfera naranja que no encierre a otra curva en su interior, entonces  $c$  es borde de un disco  $D$  en la esfera naranja que tiene su borde en una esfera verde, y  $D$  no toca a otras esferas verdes, así que podemos usarlo para cortar a una esfera verde en dos esferas. Por la observación 2, si reemplazamos esa esfera por estas dos obtenemos una colección de esferas verdes que dan la misma descomposicion en factores primos e intersectan menos veces a las naranjas. •

### Problemas

1. Muestra que el espacio proyectivo y los espacios lente son irreducibles (hint: encuentra sus cubiertas universales).
2. Muestra que  $H_1(M + N) \simeq H_1(M) + H_1(N)$ . ¿Que se puede decir de  $H_2(M)$ ?
3. El género de Heegaard  $g$  satisface  $g(M + N) \leq g(M) + g(N)$ .
4. Demuestra que  $S^2 \times S^1$  y el 3-toro son primas.
5. Existen un número infinito de variedades primas cerradas no homeomorfas.
6. ¿Que variedad es esta?



7. ¿Hasta cuantos factores primos que puede tener una 3-variedad que puede triangulable con  $t$  tetraedros?
8. Muestra que  $S^2 \times S^1 + S^2 \tilde{\times} S^1 = S^2 \tilde{\times} S^1 + S^2 \tilde{\times} S^1$