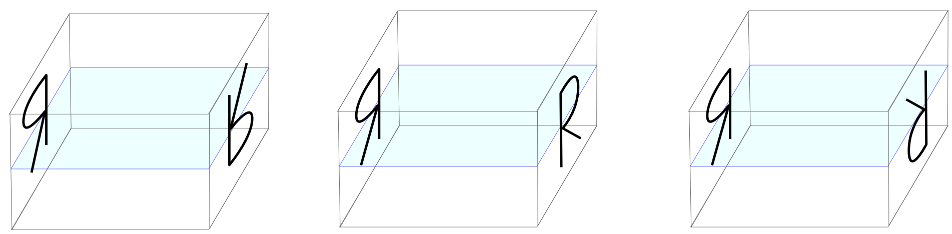
Superficies en 3-variedades

Las superficies encajadas en las 3-variedades juegan un papel análogo al de las curvas encajadas en las superficies. Una superficie S está **propiamente encajada** en una 3-variedad M si $S \cap \partial M = \partial S$.

Una **vecindad regular** de S es una vecindad N homeomorfa a un haz de intervalos sobre S (si S tiene borde pedimos además que $N \cap \partial M$ sea una vecindad regular de ∂S en ∂M).

Una superficie S **tiene dos lados** en M si su vecindad regular es un haz trivial, S tiene **un lado** en M si su vecindad regular es un haz no trivial.



. Banda de Moebius de un lado en $S^1 \times D^2$ | Banda de Moebius de dos lados en $S^1 \widetilde{\times} D^2$ | Anillo de un lado en $S^1 \widetilde{\times} D^2$

Si S es una superficie propiamente encajada en M, **cortar** a M por S significa quitarle a M el interior de una vecindad regular de S. Al resultado se le denota por $M|_S$. Observar que si S tiene dos lados entonces $M|_S$ es una variedad cuya frontera contiene 2 copias de S, y si las pegamos obtenemos una variedad homeomorfa a M.

Lema. Si S es una superficie propiamente encajada en M, son equivalentes

- S no separa a M.

- Existe una curva en M que cruza a S en un punto.

- Existe una curva en M que cruza a S en un numero impar de puntos.

Dem. Sea a un arco que atraviesa a S en un punto. Si S no separa a M entonces hay un arco a' en $M - S$ que conecta a los dos extremos de A. La unión de $a \cup a'$ es una curva cerrada que cruza a S en un punto. Si S separa a M entonces cualquier curva cerrada en M debe atarvesar a S en un número par de puntos, ya que cada vez que entra a un lado debe salir, o no podría cerrar. •

En una 3-variedad M cada clase en $H_1(M)$ se pueden representar por curvas cerradas inmersas en M, y cada clase en $H_2(M)$ se puede representar por superficies cerradas y orientables inmersas en M.

Lema. Si M es una 3-variedad, entonces todas las clases en $H_2(M)$ pueden representarse con superficies encajadas en M.

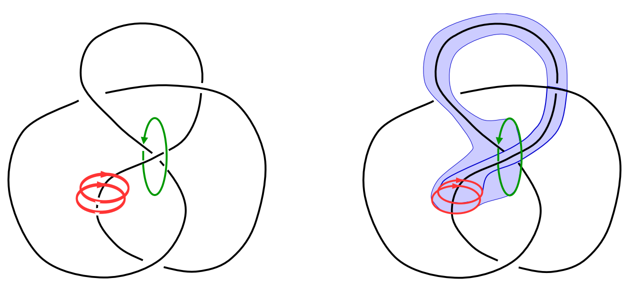
Demostración. Cada clase en $H_2(M)$ está representada por una superficie orientada inmersa S y podemos suponer S se autointersecta transversalmente, de modo que sus singularidades son una colección finita de curvas dobles y puntos triples. Podemos cortar a S a lo largo de las curvas dobles y reensamblar los pedazos que quedan respetando sus orientaciones pero de modo que no se crucen. El resultado es una superficie encajada S' homóloga a S. •

Corolario. Si el homomorfismo $H_1(\partial M) \to H_1(M)$ no es inyectivo, entonces existe una superficie orientable S propiamente encajada en M tal que ∂S no es homologa a 0 en ∂M.

Demostración. Si una clase en $H_1(\partial M)$ es trivial en $H_1(M)$ entonces hay una 2-cadena en M cuya frontera es un ciclo no trivial en ∂M . La 2-cadena es una superficie inmersa en M, y por el lema anterior podemos cortarla y pegarla (conservando la orientación) para obtener una superficie encajada, cuyo borde es una colección de curvas simples y ajenas homólogas a la frontera de la superfcie original. •

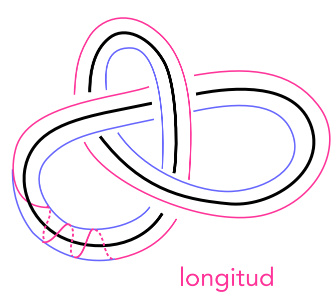
Ejemplo: superficies en complementos de nudos.

Si k es un nudo en S^3 entonces $H_1(S^3 - k) \simeq \mathbb{Z}$ y el generador de $H_1(S^3 - k)$ es el meridiano de k. Así que cualquier curva en $S^3 - k$ es homóloga a un múltiplo del meridiano.



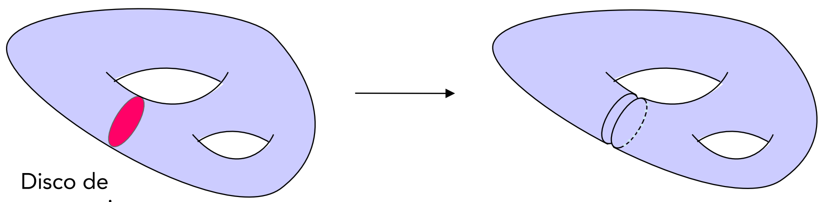
$H_2(S^3 - k) = 0$ ya que todas las superficies en S^3 son separantes, y dejan al nudo de un lado.

Si N es una vecindad tubular del nudo k, entonces ∂N es un toro. $H_1(\partial N) = \mathbb{Z}^2$ asi que no puede inyectarse en $H_1(S^3 - k) = \mathbb{Z}$: deben existir curvas no triviales en ∂N que sean el borde de superficies orientables en $S^3 - k$. De hecho, como un generador de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ va al generador de $\mathbb{Z}$, el kernel es $\mathbb{Z}$ y está generado por una curva que cruza una vez al meridiano. Esta curva es la **longitud** del nudo.



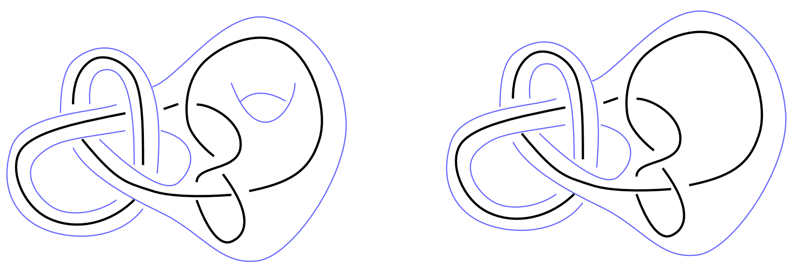
Superficies incompresibles

Decimos que una superficie S es **compresible** en M si existe un disco D en M tal que $D \cap S = \partial D$ y ∂D **no** es el borde de un disco en S. Decimos que D es un **disco de compresión** para S, si cortamos S por D obtenemos una superficie S', posiblemente disconexa tal que $\chi(S') = \chi(S)+2$ (así que si S es cerrada y S' es conexa, $g(S') = g(S)-1$).



Una superficie S es **incompresible** en M si S no es compresible y S no es una esfera o un disco que separen una bola del resto de la variedad.

Ejemplo. Una superfice compresible y una superficie incompresible en el complemento de un nudo:

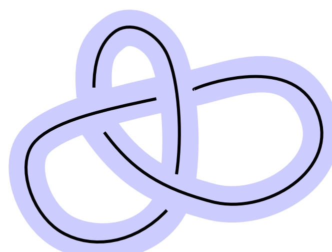


Teorema. Todas las superficies encajadas en $\mathbb{R}^3$ son compresibles.

Demostración. Es similar a la demostración de que todas las esferas suaves en $\mathbb{R}^3$ bordean bolas: Si S es una superficie encajada suavemente en $\mathbb{R}^3$, podemos poner a S en posición de Morse, de modo que la función altura $h : S \to \mathbb{R}$ tenga un número finito de puntos críticos, todos a distintas alturas. Si S no es una esfera y P es un plano horizontal inmediatamente despues del primer punto silla, y c es una curva en $S \cap P$ que no contiene a otra curva de intersección en su interior, entonces c es el borde de un disco D que toca a S solo en c. Si c no bordea un disco en S entonces D es un disco de compresión para S. Si c bordea un disco D' en S, entonces $D \cup D'$ forman una esfera encajada que debe bordear una bola en $\mathbb{R}^3$, por lo tanto hay una isotopia de $\mathbb{R}^3$ que lleva D' a D y convierte a S en una superficie S' con menos puntos críticos que S (si D' contiene al menos 2 puntos críticos) o al menos reduce el número de intersecciones de la superficie con P, dejando el punto silla abajo de P (en el caso de que D contenga solo un punto crítico que es un mínimo o un máximo). En este caso podemos volver a tomar una curva en $S' \cap P$ que no tenga otras curvas en su interior y repetir el argumento. •

Ejemplo. Todos los toros no separantes en T^3 son incompresibles: si hubiera un toro no separante incompresible podríamos comprimirlo y obtendríamos una esfera no separante, pero T^3 es irreducible.

Ejemplo. Si k es un nudo en S^3, el borde de la vecindad regular de k es un toro en $S^3 - k$ (llamado el **toro periférico** de k). Si el toro periferico de k es compresible, entonces hay una curva esencial c en el toro que es borde de un disco en $S^3 - k$, en particular c debe ser trivial en homología, por lo tanto c debe ser una longitud del toro. Si unimos el disco con el anillo que va de la longitud al nudo, obtenemos un disco cuyo borde es el nudo. Pero esto dice que el nudo es trivial (ya que podemos enderezar al disco y entonces k se convierte en un círculo desanudado).



Corolario. Si una 3-variedad M contiene una superficie no separante, entonces contiene una superficie no separante incompresible.

Demostración. Sea S una superfice no separante en M, entonces existe una curva c en M que cruza a S en un número impar de puntos. Si S es compresible y D es un disco de compresión, podemos comprimir a S por D y obtener otra superficie S' (posiblemente disconexa) con el mismo borde y con $\chi(S') > \chi(S)$, y c cruza a S' en un número impar de puntos (por cada cruce de c con D se crean dos cruces de c con S'). Las componentes de S' son mas simples que S y alguna cruza a c un número impar de puntos, asi que no es separante. •

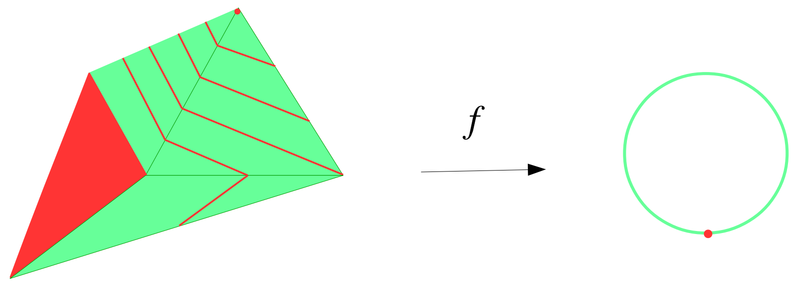
Ojo. El corolario anterior no vale para superficies separantes. POr ejemplo, S^3 contiene mucha superficies cerradas, pero no contiene superficies incompresibles.

Teorema. Toda 3-variedad compacta M con $H_1(M)$ infinito contiene una superficie no separante.

Demostración. Si $H_1(M)$ es infinito, entonces existe un epimorfismo $e : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$. Vamos a construir una funcion continua de $f : M \to S^1$ que realice ese homomorfismo, tomando una triangulacion de M y definiendo a f de modo que sea lineal en cada simplejo de la triangulación. Elejimos a un vértice v de la triangulación como punto base para M, fijamos un punto arbitrario p en S^1.

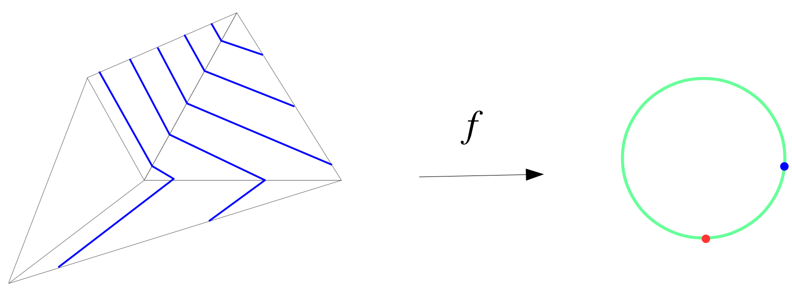
Fijamos un arbol generador T del 1-esqueleto de la triangulación, y enviemos todos los 1-simplejos del arbol a p. Para definir f en los 1-simplejos restantes, observemos que cada 1-simplejo σ hay un único camino α en T que va de v al punto inicial de σ y un unico camino β que va de v al punto final de σ. La trayectoria $\alpha\sigma\beta^{-1}$ es un lazo basado en v asi que representa un elemento de $\pi_1(M)$ cuya imagen bajo el epimorfismo $e : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ es un número n. Definimos f en σ de modo que le de n vueltas (a velocidad constante) a S^1.

Una vez que f está definida en todos los 1-simplejos, la definimos en cada 2-simplejo Δ como sigue: la frontera de Δ está formada por tres 1-simplejos σ_1, σ_2 y σ_3. Afirmamos que la imagen de $\partial\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ bajo e es un lazo trivial en S^1. Para ver esto, observar que si α_i es el camino en T que va de v al el punto inicial de σ_i, y β_i es el camino en T que va de v a punto final de σ_i, entonces $\alpha_1\sigma_1\beta_1^{-1}\alpha_2\sigma_2\beta_2^{-1}\alpha_3\sigma_3\beta_3^{-1} = \alpha_1\sigma_1\alpha_2^{-1}\alpha_2\sigma_2\alpha_3^{-1}\alpha_3\sigma_3\alpha_1^{-1} = \alpha_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\alpha_1^{-1}$ es un lazo trivial en M y por lo tanto $0 = e(\alpha_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\alpha_1^{-1}) = 0$.



Como $f(\partial\Delta)$ es homotopicamente trivial en S^1, podemos usar la homotopía para extender f al interior de Δ para todos los 2-simplejos de la triangulación de M, y solo falta definirla en los 3-simplejos. Para esto basta observar que la frontera de un 3-simplejo es una esfera, que es enviada for f a S^1, pero $\pi_2(S^1) = 0$ asi que la imagen de la frontera del simplejo debe ser homotopica a un punto, y podemos usar esta homotopia para extender f al interior del 3-simplejo.

Como definimos a f de modo que fuera lineal por pedazos en los 1-simplejos, podemos elegir a las homotopias para que las extensiones a los 2-simplejos y los 3-simplejos sean lineales por pedazos.



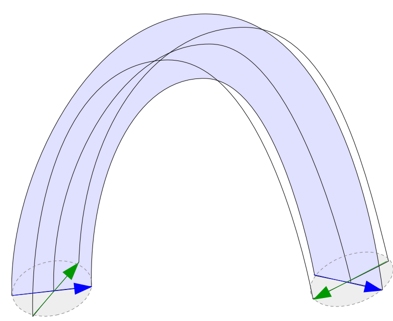
La función f así definida tiene un valor singular en el punto p donde va a dar al arbol generador, y todos los demas valores son regulares. La preimagen de un valor regular de f es una subvariedad de codimensión 1 de M, es decir una superficie F, posiblemente disconexa, propiamente encajada en M. Una de las componentes de F debe ser no separante ya que hay un lazo en M cuya imagen bajo f le da una vuelta al círculo, y por lo tanto cruza una sola vez a la preimagen de un valor regular. •

Teorema. Si M es una 3-variedad compacta y orientable cuyo borde no son únicamente esferas, entonces $H_1(M)$ es infinito.

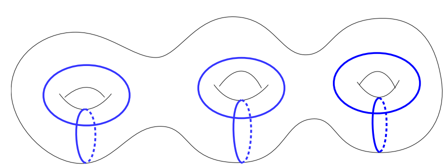
Para demostrar el teorema basta ver que si $H_1(\partial M)$ es infinito entonces $H_1(M)$ debe ser infinito. Para esto usamos el siguiente lema.

Lema. Si α y β son dos clases de homología en $H_1(\partial M)$ que se anulan en $H_1(M)$, entonces $\alpha \cdot \beta = 0$.

Demostración. α está representada por una coleccion a de curvas simples y ajenas en ∂M. β está representada por otra colección b de curvas simples y ajenas. Si α y β son 0 en $H_1(M)$ entonces a y b son el borde de dos superficies orientadas propiamente encajadas S_a y S_b, y las orientaciones de a y b son las inducidas por las orientaciones de S_a y S_b. Tenemos que mostrar que la suma de las intersecciones con signo de a y b es 0. Podemos suponer que las superficies S_a y S_b se intersectan transversalmente, por lo tanto su intersección consiste de curvas y arcos simples y ajenos. De cada punto de $a \cap b$ sale un arco de $S_a \cap S_b$, que debe terminar en otro punto de $a \cap b$, y podemos observar que los signos de las intersecciones de a y b en los dos puntos son opuestos (la figura muestra como son las orientaciones inducidas). Por lo tanto la suma con signos de las intersecciones de a y b debe ser 0.



Demostración del teorema. Como S es orientable ∂M consiste de superficies orientables. Por hipotesis alguna es una superficie S de género $g > 0$. $H_1(S)$ tiene una base formada por $2g$ curvas $a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n$ donde $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$.



Por el lema anterior, si a_i (o alguno de sus multiplos) es 0 en $H_1(M)$, entonces ni b_i ni sus múltiplos puede ser 0 en $H_1(M)$, por lo tanto b_i tiene orden infinito en $H_1(M)$. •

Problemas

1. Encuentra una 3-variedad cerrada que contenga una superficie no orientable de dos lados.

2. Muestra que una superficie S tiene dos lados en M si S separa a su vecindad regular, y que S tiene un lado en M si no la separa.

3. Las clase de homología representadas por superficies conexas en M son indivisibles en $H_2(M)$, es decir, no son múltiplos propios de otras clase de homología.

4. Demuestra que las únicas superficies cerradas incompresibles en $S^2 \times S^1$ son las esferas.

5. Demuestra que todos los toros separantes en T^3 son compresibles.

6. Si F es una superficie cerrada distinta de S^2 y P^2 entonces $F \times S^1$ contiene una infinidad de superficies incompresibles.

7. Muestra que existe una superficie encajada en el complemento de k cuyo borde es k', pero que no existe ninguna superficie encajada en el complemento de k cuyo borde es k''.