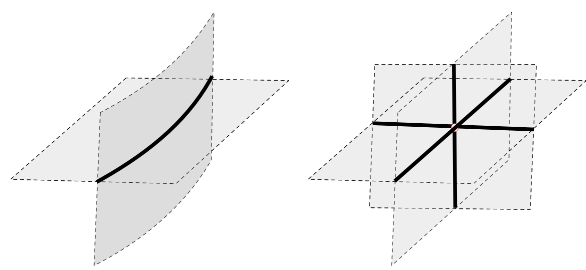
Los teoremas del lazo y la esfera

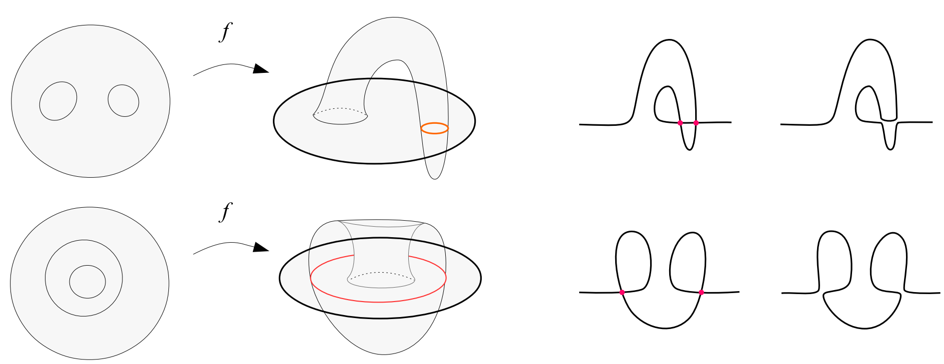
El lema de Dehn. Si M es una 3-variedad y C es una curva simple en ∂M que es el borde de un disco inmerso en M, entonces c es el borde de un disco encajado en M.

Demostración. Sea $f : D \to M$ una inmersión del disco en M, con $f(\partial)D = c$. Como $f(\partial D)$ es un encaje, podemos empujar las singularidades de $f(D)$ al interior de M, de modo que f sea un encaje en una vecindad de ∂D. Podemos suponer que las intersecciones de $f(D)$ son transversales y que consisten de curvas dobles y puntos triples.



Las preimagenes de las singularidades en D son pares de curvas que se cruzan en las preimagenes de los puntos triples.

1. Si las preimágenes de una curva doble son dos curvas simples y ajenas c_1 y c_2 en D, podemos cortar y pegar D para obtener un disco sin singularidades:



Esto se hace redefiniendo la función f, de modo que se intercambien los discos bordeados por c_1 y c_2, o que se voltee el anillo entre c_1 y c_2, si una curva encierra a la otra. Problema: hay discos inmersos tales que las preimágenes de las curvas dobles no son curvas simples ni ajenas.

2. Si $f : D \to M$ se levanta como un encaje en una cubierta doble, entonces la preimagen de $f(D)$ en la cubierta son dos discos encajados. Pero dos discos encajados solo pueden intersectarse transversalmente en curvas y arcos simples y ajenos, de modo que las singularidades de f son curvas dobles simples y ajenas. Podemos aplicar el caso 1 para modificar f y obtener un encaje. Si f se levanta a una cubierta doble, pero no a un encaje, podemos intentar levantarla una y otra vez, hasta obtener un encaje. Como el disco D es simplemente conexo, toda función $f : D \to M$ se levanta a las cubiertas, asi que lo que necesitamos es:

- Que exista la cubierta doble.
- Que el levantamiento de f sea mas simple que f.

Que exista o no una cubierta doble depende de la variedad. Para medir que tan complicada es una inmersión f, podemos contar cuantas curvas dobles y cuantos puntos triples tiene.

3. Construyamos una torre de cubiertas dobles

$$\begin{tikzcd}
& f_n(D) \arrow[r] & V_n \arrow[r] & M_n \arrow[dl, "p_n"'] \\
& \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
& f_2(D) \arrow[r] & V_2 \arrow[r] & M_2 \arrow[dl, "p_2"'] \\
& f_1(D) \arrow[r] & V_1 \arrow[r] & M_1 \arrow[dl, "p_1"'] \\
D \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] \arrow[uuuur] & f(D) \arrow[r] & V_0 \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

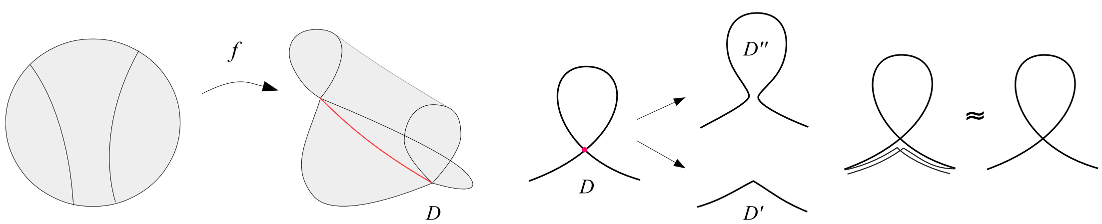
donde V_0 es una vecindad regular de $f(D)$, M_1 es una cubierta doble de V_0, $f_1 : D \to M_1$ es un levantamiento de f a M_1 y V_1 es una vecindad regular de $f_1(D)$. Si existe la cubierta doble M_{i+1} de V_i entonces hay un levantamiento $f_{i+1} : D \to M_{i+1}$. Si V_{i+1} es una vecindad regular de $f_{i+1}(D)$, entonces V_{i+1} (que es homotopicamente equivalente a $f_{i+1}(D)$) no es homeomorfa a $f_i(D)$ (que es homotopicamente equivalente a $f_i(D)$) y por lo tanto $f_{i+1}(D)$ tiene menos singularidades(puntos triples o curvas dibles) que $f_i(D)$. Como el número de singularidades disminuye en cada cubierta, sólo pueden existir un número finito de cubiertas.

Si no existe una cubierta doble de V_n entonces $H_1(V_n)$ es finito y por lo tanto ∂V_n consta de esferas. Como $f_n(\partial D)$ es una curva simple contenida en una de estas esferas, entonces es el borde de disco D' encajado en V_n, que podemos empujar hacia el interior de V_n para que este propiamente encajado. Ahora la proyección cubriente $p_n : M_n \to V_{n-1}$ es 2 a 1, por lo tanto $p_n(D')$ no puede tener puntos triples, sino solamente curvas dobles. El argumento de la parte 1 muestra como modificar a $p_n(D')$ para quitar las curvas dobles y obtener un disco D'' encajado en V_{n-1} y con la misma frontera que $p_n(D')$. Nuevamente $p_{n-1:}M_{n-1} \to V_{n-2}$ es 2 a 1, por lo tanto $p_{n-1}(D'')$ no tiene puntos triples sino solamente curvas dobles, asi que podemos modificarlo para obtener un disco encajado D''' en V_{n-2} con la misma frontera que $p_{n-1}(D'')$, y podemos repetir este argumento hasta conseguir un disco encajado en M con la misma frontera que $f(D)$. •

Observar que si una superficie F es compresible, entonces hay una curva en F que no puede contraerse a un punto en F pero si puede contraerse a un punto en M, asi que homomorfismo $\pi_1(F) \to \pi_1(M)$ no es inyectivo.

Teorema del lazo. Si en una 3-variedad M existe una curva inmersa esencial en ∂M que bordea un disco inmerso en M, entonces existe una curva simple esencial en ∂M que bordea un disco encajado en M.

Demostración. Si $\pi_1(\partial M) \to \pi_1(M)$ no es inyectivo, entonces hay una curva c inmersa en ∂M que es el borde de un disco D inmerso en M. Podemos suponer que D se autointersecta transversalmente y que toca transversalmente a ∂M, de manera que las singularidades son curvas y arcos dobles y un número finito de puntos triples. Podemos aplicar la demostración del lema de Dehn: Si D no tiene puntos triples, sus intersecciones son curvas y arcos dobles. Podemos cortar y pegar D a lo largo de una curva doble para obtener otro disco en M con la misma frontera y con menos singularidades. Tambien podemos cortar y pegar a D a lo largo de un arco doble, de dos maneras distintas, para obtener dos discos D' y D'' en M con menos singularidades, pero estos no tienen la misma frontera que D:



Se puede ver que D es libremente homotópico (manteniendo su frontera en ∂M) a un disco formado por dos copias de D' y una copia de D'', asi que si las fronteras de D' y D'' fueran elementos triviales de $\pi_1(\partial M)$ entonces la frontera de D tambien lo sería. Ahora podemos aplicar la misma prueba que el lema de Dehn, construyendo una torre de cubiertas dobles, la cual no puede continuar indefinidqamente por la misma razon que antes. En el momento que no haya una cubierta doble la frontera de V_n consta de esferas. Ahora necesitamos escojer una curva simple en ∂V_n que no se proyecte a una curva trivial en ∂M. Esto es posible porque la preimagen de ∂M en ∂V_n es una superficie planar P que contiene una curva esencial c en ∂M (la frontera del disco inmerso original). Si c no es simple, es el producto de dos lazos c' y c'', y si los dos fueran triviales en ∂M su producto lo seria. De modo que al menos uno de ellos, digamos c', es una curva esencial en ∂M. Si c' no es simple es el producto de dos lazos c''' y c'''', etc. De modo que hay una curva simple c en ∂V_n que se proyecta a una curva esencial en ∂M. c bordea un disco D' en ∂V_n que podemos empujar hacia el interior de V_n para que este propiamente encajado. Consideramos ahora la cubierta doble $p_n : M_n \to V_{n-1}$, como $p_n(D')$ no tiene puntos triples, sus singularidades consisten de curvas y arcos dobles, por lo que podemos aplicar el argumento al principio de esta prueba para encontrar un disco encajado D'' en V_{n-1} cuya frontera (que puede ser distinta a la de $p_n(D')$) no se proyecte a una curva trivial en ∂M. Asi podemos bajar de uno en uno los pisos de la torre hasta encontrar un disco encajado en M cuya frontera sea una curva no trivial en ∂M. •

Corolario. Si F es una superficie de dos lados en M, entonces F es incompresible si y solo si el homomorfismo inducido $\pi_1(F) \to \pi_1(M)$ es inyectivo.

Demostración. Supongamos que $\pi_1(F) \to \pi_1(M)$ es inyectivo, y sea $f : D \to M$ una función continua del disco a M con $f(\partial D)$ una curva esencial en ∂M. Podemos empujar a $f(D)$ hacia un lado de F para que intersecte a F transversalmente. Como F esta encajada en M, $f^{-1}(F)$ consta de curva simples ajenas en D,. tomemos una curva c que no encierre a ninguna otra en su interior. Si $f(c)$ no es esencial en F entonces hay una funcion continua g del disco encerrado por c a la superficie F que coincide con f en c. Podemos reemplazar a f por g en el interior de c y empujarla hacia un lado de F para reducir el numero de intersecciones de $f(D)$ con F. Si $f(c)$ es esencial en F, podemos cortar a M por F y aplicar el teorema del lazo, y esto produce un disco de compresión para F.

Ojo: El corolario no vale para superficies de un solo lado: existen superficies incompresibles de un lado cuyo grupo no se inyecta en el grupo de la variedad.

Ejemplo. El espacio lente $L(4,1)$ contiene una botella de Klein (tarea). La botella debe ser incompresible, porque si no podriamos comprimirla y $L(4,1)$ contendría un plano proyectivo no separante, así que contendria una esfera esencial, pero los espacios lente son irreducibles. Pero el grupo de la botella de Klein es $\mathbb{Z}\widetilde{\times}\mathbb{Z}_2$ que no puede inyectarse en el grupo de la variedad, que es $\mathbb{Z}_4$.

Corolario. Un nudo k en S^3 es un no trivial si y solo si el grupo fundamental del toro periférico (la frontera de la vecindad de k) se inyecta en el grupo de $S^3 - k$.

Demostración. Si el grupo del toro periférico no se inyecta en el grupo de $S^3 - k$), entonces por el teorema del lazo hay una curva simple esencial en el toro que es borde de un disco encajado en $S^3 - k$. Esta curva es trivial en $H_1(S^3 - k)$ y por lo tanto es una longitud (una curva en el toro que es paralela al nudo) de modo que el nudo es el borde de un disco encajado en S^3, por lo tanto k es un nudo trivial.

Corolario. Si M una 3-variedad compacta prima y $\pi_1(M)$ es un grupo libre, entonces M es homeomorfa a $S^2 \times S^1$ o $S^2 \widetilde{\times} S^1$ o M es un cubo con asas.

Demostración. Si $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ entonces M contiene una superficie F propiamente encajada y no separante. Si F es compresible podemos comprimirla para obtener otra superficie no separante F' con $\chi(F') > \chi(F)$, asi que despues de comprimir un numero finito de veces obtenemos una superfice no separante incompresible F^i y por el corolario anterior, $\pi_1(F^i)$ se inyecta en $\mathbb{Z}$. Si M es cerrada F^i debe ser una esfera. Como M es una variedad prima que contiene una esfera no separante M

debe ser $S^2 \times S^1$ o $S^2 \tilde{\times} S^1$.

Si M tiene frontera entonces podemos comprimir a ∂M hasta obtener una superficie cerrada separante incompresible F^i. Entonces $\pi_1(F^i)$ se inyecta en $\mathbb{Z}$ por lo que F^i debe ser una esfera. Como M es irreducible F^i bordea una bola B en M. Como B se obtiene al cortar a M por los discos de compresion de ∂M, M se obtiene de B pegando discos de la frontera, por lo tanto M es un cubo con asas. •

Teorema (Conjetura de Knesser). Si M es una 3-variedad cerrada y $\pi_1(M) = A*B$ (donde A y B son grupos abstractos) entonces $M = M_1 + M_2$ con $\pi_1(M) = A$ y $\pi_1(M) = B$.

Demostración. Existen complejos simpliciales K_A y K_B tales que $\pi_1(K_A) = A$, $\pi_1(K_B) = B$ y $\pi_2(K_A) = 0 = \pi_2(K_B)$. Sea K el complejo simplicial que se obtiene conectando a K_A y K_B por medio de un 1-simplejo σ, entonces $\pi_1(K) = A*B$. Vamos a definir una función continua $f : M \to K$ que induzca un isomorfismo entre los grupos fundamentales, como sigue: Fijemos una triangulación de M, y un vértice v. Enviemos a todos los vértices y a todas las aristas de un arbol generador del 1-esqueleto a un vértice del 1-simplejo que conecta K_1 con K_2. Cada arista restante a determina un lazo l en el 1-esqueleto: viajando por el arbol desde v a la arista, recorriendo la arista y regresando por el arbol a v. l representa un elemento de $\pi_1(M)$, que corresponde a un elemento de $\pi_1(K)$, que está representado por un camino c en el 1-esqueleto de K. Definir $f(a) = c$. Esto define f en todos los 1-simplejos de M. Si D es un 2-simplejo en M, la definición anterior garantiza que $f(\partial D)$ es un lazo homotópicamente trivial en K, de modo que f puede extenderse a una función continua en el interior de D. Finalmente, si Δ es un 3-simplejo de M, $f(\partial\Delta)$ representa un elemento de $\pi_2(K) = 0$, asi que f se extiende a una función continua en el interior de Δ. Por la forma en que la definimos, podemos suponer que $f_M \to K$ es lineal por pedazos, y que la magen de cada simplejo de M que toca al interior de la arista que une a K_1 y K_2 es toda esa arista. Si p es un punto en el interior de esa arista, $f^{-1}(p)$ es una superficie F -posiblemente disconexa- en M. Podemos deformar a f por una homotopía para que cada componente de F sea incompresible. Como el grupo fundamental de cada componente de F se inyecta en $\pi_1(M)$ pero la imagen de cada componente es un punto en K y $f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(K)$ es un isomorfismo, entonces el grupo fundamental de cada componente es trivial y por lo tanto la componente debe ser una esfera. Si F consta de mas de una esfera, existe un camino que conecta a dos de ellas y cuya imagen en K es un lazo trivial. Podemos deformar a f por una homotopía de modo que las dos esferas se conviertan en una sola, y repetiendo esto llegamos a una función homotópica a f tal que la preimagen del punto es una esfera, y las preimágenes de K_1 y K_2 (mas un subintervalo) bajo esta función son . los dos pedazos en los que la esfera divide a M, de modo que el grupo fundamental de un pedazo es $\pi_1(K_1)$ y el grupo fundamental del otro es $\pi_1(K_2)$. •

El Teorema de la Esfera

Lema. Si X es un espacio topológico con cubierta universal $\tilde{X}$ entonces $\pi_n(\tilde{X}) \simeq \pi_n(X)$ para toda $n > 1$.

Demostración. La aplicación cubriente $p : \tilde{X} \to X$ induce homomorfismos $p_* : \pi_n(\tilde{X}) \to \pi_n(X)$

para toda n. Estos homomorfismos son epimorfismos ya que para $n > 1$, la esfera S^i es simplemente conexa asi que toda aplicación $f : S^n \to X$ se levanta a una aplicación $\tilde{f} : S^n \to \tilde{X}$, lo que implica que $p \circ \bar{f} = f$.

Para $n > 1$ estos homomorfismos son monomorfismos, porque cada homotopía en X se levanta a una homotopía en $\bar{X}$, asi que si f, f' son aplicaciones de S^n a $\tilde{X}$ con punto base $*$ y hay una homotopía de $p \circ f$ a $p \circ f'$ entonces el levantamiento de h da una homotopía de f a f'. •

Teorema de Hurewicz. Si X es un espacio topologico y $\pi_i(X) = 0$ para $1 \leq i < k$ entonces $\pi_k(X) \simeq H_k(X)$.

Idea parcial de la demostración. Si Δ es un i-simplejo y colapsamos $\partial\Delta$ a un punto obtenemos una i-esfera (y podemos pensar que $\partial\Delta$ va a dar al polo norte de S^i). Asi que para cada i hay una aplicación natural $a_i : \pi_i(X) \to H_i(X)$ que a cada esfera singular $f : S^i \to X$ la considera como una i-cadena singular (formada por un solo simplejo) en X.

Si $\pi_i(X) = 0$ para $i < k$ entonces a_k es un epimorfismo, ya que cada k-ciclo en X, puede deformarse por una homotopía para que la frontera de cada uno de los k simplejos singulares que forman el ciclo sea una aplicaión constante al punto base p, de modo que cada simplejo singular $f : \Delta_k toX$ se vea como una aplicación $S_k \to X$. Para esto, consideremos al k-ciclo singular como una aplicación f de un complejo simplicial K al espacio X, donde los pares de caras de simensión $k-1$ que se cancelan en X para dar un k ciclo ya estan identificadas en K. La homotopía $H : K \times [0,1] \to X$ se define como sigue: En $K \times 0$ definir H como f En $K^{k-1} \times 1$ definir H como p. Para cada vértice v de K, definir H en $v\ times[0,1]$ como una trayectoria en X que lleve $f(v)$ a p. Para cada arista a de K, definir H en $a \times [0,1]$ como una homotopía entre el lazo dado por $H(\partial a \times [0,1])$ y p. Esta homotopía existe porque $\pi_1(X) = 0$. Para cada 2-simplejo D, definir H en $D \times [0,1]$ como una homotopía entre la esfera dada por $H(\partial D \times [0,1])$ y p. Esta homotopía existe porque $\pi_2(X) = 0$. Así podemos definir la homotopía para cada $i < k$. El ciclo dado por $H : K \times 1 \to X$ es homólogo al ciclo $f : KtoX$, y como H es constante en el $k-1$ esqueleto de K, cada k simplejo singular corresponde a una k-esfera singular en X.

La parte mas delicada es ver que a_k es un monomorfismo, es decir, que si una esfera singular en X es homologa a 0 en X y todos los grupos de homotopía de dimensiones menores de X son triviales, entonces la esfera singular es homotópica a un punto. (Ver el libro de topología algebráica de Hatcher). •

El Teorema de la esfera. Si M es una 3-variedad orientable con $\pi_2(M) \neq 0$ entonces existe una esfera encajada en M que representa un elemento no trivial en $\pi_2(M)$, o un plano proyectivo de 2 lados cuya doble cubierta es un elemento no trivial en $\pi_2(M)$.

Idea de la demostración. Si $\pi_2(M) \neq 0$ entonces por el lema y teorema anteriores $\pi_2(M) \simeq \pi_2(\widetilde{M}) \simeq H_2(\widetilde{M}) \neq 0$, asi que cada clase en $\pi_2(M)$ corresponde a una clase en $\pi_2(\widetilde{M})$, que correspnde a una clase en $H_2(\widetilde{M})$, que esta representada por una superficie encajada en $\widetilde{M}$. Como las compresiones no cambian la clase de homología, cada clase puede representarse por una superficie incompresible. Como $\pi_1(\widetilde{M}) = 0$, la únicas superfices cerradas incompresibles en $\widetilde{M}$ son las esferas S. De modo que hay una clase de $\pi_2(\widetilde{M}) \simeq H_2(\widetilde{M})$ representada por una esfera S encajada en $\widetilde{M}$. Necesitamos una esfera S que se proyecte bajo $p : \widetilde{M} \to M$ a una esfera encajada o a un plano proyectivo encajado en M. La proyección no tiene intersecciones si los trasladados de S por el grupo de transformaciones cubrientes de $\widetilde{M}$ no intersectan a S. Vamos a ver que si elegimos la esfera S que tenga área mínima entre todas las esferas encajadas en $\widetilde{M}$ que representen elementos no triviales de $H_2(\widetilde{M})$ entonces S no puede cruzar a sus trasladados (aunque si puede suceder que $t(S) = S$, en este caso t es una transformacion cubriente de la esfera y $p(S)$ es un plano proyectivo.

Si t es una transformación cubriente S y $t(S)$ se intersectan transversalmente, su intersección consiste de curvas simples cerradas. Entre las curvas de intersección elijamos una curva c que sea borde del disco D de menor área entre todos los discos en S o en $t(S)$ bordeados por esas curvas. Digamos que $D \subset S$. Entonces D no contiene otras curvas de intersección. Si D' y D'' son los discos bordeados por c en $t(S)$, entonces $S' = D \cup D'$ y $S'' = D \cup D''$ son dos esferas encajadas cuyas áreas son menores o iguales que la de S, pero estas esferas tienen dobleces en c, que podemos suavizar de modo que su área disminuya para hacerse estrictamente menor que la de S. Como la clase de homología de $t(S)$ es la suma de las clases de homología de S' y S'', si la clase de homología de S no es trivial, una de estas clases no lo es. •

Si M es orientable la segunda alternativa no puede darse, pero si M no es orientable esa posibilidad no puede descartarse. Por ejemplo, $\pi_2(P^2 \times S^1) \neq 0$, pero $P^2 \times S^1$ no contiene esferas encajadas esenciales.

Teorema. Si M es una 3-variedad irreducible, entonces su cubierta universal $\widetilde{M}$ es irreducible.

Idea de la demostración. Veremos que si $\widetilde{M}$ contiene esferas esenciales entonces M tambien las contiene. La prueba es muy parecida a la del teorema de la esfera. Elijamos una esfera S que tenga la menor área posible entre todas las esferas esenciales en $\widetilde{M}$. Afirmamos que S no intresecta a sus trasladados bajo las transformaciones cubrientes de $\widetilde{M}$, y por lo tanto $p(S)$ está encajada en M

Como antes, si t es una transformación cubriente S y $t(S)$ se intersectan transversalmente, su intersección consiste de curvas simples cerradas. Entre las curvas de intersección elijamos una curva c que sea borde del disco D de menor área entre todos los discos en S o en $t(S)$ bordeados por esas curvas. Digamos que $D \subset S$. Entonces D no contiene otras curvas de intersección. Si D' y D'' son los discos bordeados por c en $t(S)$, entonces $S' = D \cup D'$ y $S'' = D \cup D''$ son dos esferas encajadas cuyas áreas son menores o iguales que la de S, pero estas esferas tienen dobleces en c, que podemos suavizar de modo que su área disminuya para hacerse estrictamente menor que la de S. Por nuestra elección de S como una esfera esencial de área minima en $\widetilde{M}$, S' y S'' no pueden ser esenciales, de modo que bordean bolas B' y B'', y estas bolas se tocan en el disco D o una contiene a la otra. En el primer caso $t(S)$ es borde de $B' \cup B''$ y por lo tanto no es esencial, y en el segundo caso $t(S)$ está contenida en B' o en B'' y por lo tanto tambien bordea una bola. Pero $t(S)$ es la imagen de S bajo el homeomorfismo t de $\widetilde{M}$, por lo tanto $t(S)$ no puede bordear una bola a menos que S lo haga, pero S es esencial. •

Si G es un grupo, decimos que un complejo celular X es un $k(G, 1)$ si $\pi_1(X) \simeq G$ y $\pi_n(X) = 0$ para toda $n > 1$.

Teorema (Whitehead). Para cada grupo G, todos los complejos celulares $k(G,1)$ son homotopicamente equivalentes.

Idea de la demostración. Sean X y Y complejos celulares con $\pi_1(X) \xrightarrow{\phi} \pi_1(Y)$ un isomorfismo y $\pi_n(X) = \pi_n(Y)$ para $n > 1$.

Definimos una función continua $f : X \to Y$ empezando por las celdas de dimensión meas baja como sigue: Enviar a todos los vértices de X a un vertice fijo y de Y, y enviar todas las 1-celdas de un arbol generador T del 1-esqueleto de X tambien a y. Cada 1-celda a de $X - T$ determina un lazo en X, que corresponde a un elemento de $\pi_1(X)$, que bajo ϕ va a un elemento de $\pi_1(X)$, que esta representado por un lazo b en Y. Enviar a a b. Si D es una 2-celda en X entonces ∂D es homotopicamente trivial en X, por lo tanto f la envia a una curva homotopicamente trivial en Y. Definimos f en D como una homotopía de $f(\partial D)$ a un punto. Ahora procedemos inductivamente: si ya se ha definido f en el n-esqueleto de X, tomamos una $n+1$-celda D en X, entonces $f(\partial D)$ es una n esfera en Y que debe ser homotopicamente trivial porque $\pi_n(Y) = 0$, y podemos definir f en D como una homotopía de $f(\partial D)$ a un punto. Este proceso define una función continua $f : X \to Y$ tal que $f_* = \phi$. Podemos definir de la misma manera una función continua $g : Y \to X$ tal que $g_* = \phi^{-1}$. Afirmamos que f y g dan una equivalencia homotopica entre X y Y, para esto hay que ver que $g^{-1} \circ f \simeq Id_X$ y que $f^{-1} \circ g \simeq Id_Y$. •

El resultado anterior permite definir los grupos de homología de un grupo arbitrario G como $H_n(G) = H_n(k(G,1))$ (ya que los grupos de homología de $K(G,1)$ no dependen del complejo celular elegido para representar a G).

Teorema. Para cada grupo G existe un espacio $k(G,1)$.

Idea de la demostración. Sea $\widetilde{X}$ el complejo simplicial cuyos vértices son los elementos de G, cuyos 1-simplejos son las parejas ordenadas de elementos de G y cuyos n-simplejos son $(n+1)$-adas ordenadas de elementos de G.

Las caras de un n-simplejo $\Delta = (g_0, g_1, ..., g_n)$ son los $n-1$ simplejos Δ_i que se obtienen quitandole un vértice a la vez: $\Delta_i = (g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1} ..., g_n)$.

$\widetilde{X}$ es contraible: cada n-simplejo $\Delta = (g_0, g_1, ..., g_n)$ es la cara de un $n+1$-simplejo $(e, g_0, g_1, ..., g_n)$ donde e es el elemento neutro de G, y podemos contraer Δ a e acercando los vértices de Δ a e a velocidad constante y extendiendo linealmente a Δ. Como esta definición coincide en las caras de los simplejos, la función esta bien definida y es continua en todo $\widetilde{X}$. Por lo tanto $\widetilde{X}$ es contraible y todos sus grupos de homotopía son triviales.

Hay una accion natural de G en $\widetilde{X}$, Para cada $g \in G$ sea f_g la función que envía cada vértice g_i al vértice gg_i y se extiende linealemente a cada simplejo de $\widetilde{X}$. Entonces f_g es continua y tiene inversa $f_{g^{-1}}$), por lo tanto f_g define un homeomorfismo de $\widetilde{X}$.

La acción de G en $\widetilde{X}$ es libre y discontinua, ya que la función f_g envía a cada simplejo $(g_0, g_1, ..., g_n)$ al simplejo $(gg_0, gg_1, ..., gg_n)$, así que sólo f_e manda un simplejo a si mismo.

Por lo tanto $p : \widetilde{X} \to X = \widetilde{X}/G$ es un mapeo cubriente y $\pi_1(X) \simeq G$. •

Ejemplo. Un espacio $k(\mathbb{Z}, 1)$ es el círculo S^1, otro es la banda de Moebius y otro mas es el toro sólido.

Lema. Todos los espacios $k(\mathbb{Z}_n, 1)$ tienen dimensión infinita.

Demostración. Podemos construir un $k(\mathbb{Z}_n, 1)$ como sigue. Considerar el complejo celular formado por la unión de las esferas de dimensiones impares $S^1 \subset S^3 \subset ... \subset S^{2k+1} \subset ....$ Cada $S^{2k-1} \subset \mathbb{C}^k$ admite una acción del grupo $\mathbb{Z}_n$ (formado por las raices n-esimas de 1): $(a_1, a_2, ..., a_k) \to (e^{2\frac{\pi}{n}i}a_1, e^{2\frac{\pi}{n}i}a_2, ..., e^{2\frac{\pi}{n}i}a_k)$ y esta acción es libre y sin puntos fijos en S^{2k-1}. Asi que $\mathbb{Z}_n$ actua en la unión de todas las esferas impares y a la unión de todas las esferas impares. $H_k(\mathbb{Z}_n)$ es $\mathbb{Z}$ si k es impar y es 0 si k es par.

Teorema. Si M es una 3-variedad irreducible y P^2-irreducible y $\pi_1(M)$ es infinito, entonces $\pi_i(X) = 0$ para toda $i > 1$ y por lo tanto M es un $k(\pi_1(M), 1)$.

Demostración. Por el Teorema de la esfera $\pi_2(M) = 0$, ya que de lo contrario M contendría una esfera esencial o un plano proyectivo de dos lados, pero M es irreducible y P^2 irreducible. Ahora $\pi_n(M) = \pi_n(\widetilde{M})$ para cada $n > 1$. $\pi_2(\widetilde{M}) = 0$. Como $\pi_1(M)$ es infinito, la cubierta universal $\widetilde{M}$ tiene una infinidad de hojas y por lo tanto no es compacta, asi que $H_3(\widetilde{M}) = 0$. Como $\pi_1(\widetilde{M}) = \pi_2(\widetilde{M}) = 0$, el teorema de Whitehead dice que $\pi_3(\widetilde{M}) = H_3(\widetilde{M}) = 0$. Como M tiene dimensión 3, $H_n(\widetilde{M}) = 0$ para toda $n > 3$. Ahora como $\pi_1(\widetilde{M}) = \pi_2(\widetilde{M}) = \pi_3(\widetilde{M}) = 0$, el teorema de Whitehead dice que $\pi_4(\widetilde{M}) = H_4(\widetilde{M}) = 0$, etc. •

Corolario. Si M es una 3-variedad orientable, compacta e irreducible y $\pi_1(M)$ es infinito entonces la cubierta universal $\widetilde{M}$ es contraible.

Demostración. Si $\pi_1(M)$ es infinito, entonces por el teorema anterior la cubierta universal es un complejo celular con todos sus grupos de homotopía triviales, asi que por por el teorema de Hurewicz es homotópicamente equivalente a un punto.

•

Corolario. Dos 3-variedades compactas irreducibles con grupos fundamentales infinitos isomorfos son homotopicamente equivalentes.

Demostración. Cada 3-variedad irreducible M con $\pi_1(M)$ infinito es un espacio $K(\pi_1(M), 1)$, y por el teorema de Whitehead todos los espacios $K(G, 1)$ son homotópicamente equivalentes. •

Corolario. Si M es una 3-variedad compacta irreducible, y $\pi_1(M)$ es infinito, entonces $\pi_1(M)$ es libre de torsion.

Demostración. Si $\pi_1(M)$ tuviera un elemento de orden finito, entonces tendria un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_n$ y la cubierta de M con grupo fundamental $\mathbb{Z}$ sería un $k(\mathbb{Z}_n, 1)$, lo que contradice el lema anterior. •

Lema. Si M es una 3-variedad irreducible y F es una superficie compacta en ∂M tal que el homomorfismo inducido $i_* : \pi_1(F) \to \pi_1(M)$ es un isomorfismo, entonces M es un producto $F \times I$.

Demostración. $\partial M - F$ es incompresible en M, ya que de otro modo habria un disco de compresión D y $\pi_1(M)$ sería un producto libre de dos grupos (los gupos de las componentes de $M - D$, si D es separante o el producto libre del grupo de $M - D$ por $\mathbb{Z}$, si D no es separante).

Como $\pi_1(F) \to \pi_1(M)$ es un isomorfismo y $\pi_2(M) = 0$, entonces existe una retracción $p : M \to F$.

Si $\partial F \neq \emptyset$, existe una colección de arcos ajenos en F que cortan a la superficie en un disco D. Podemos suponer que las preimagenes de los arcos bajo p son superficies incompresibles en M, como p es un isomomorfismo, estas superficies deben ser simplemente conexas y por lo tanto son discos, que cortan a M en una bola sólida $D \times I$, y podemos recuperar a M pegando discos de la frontera vertical de $D \times I$, lo que muestra que $M \simeq F \times I$.

Si $\partial F = \emptyset$ entonces existe una curva simple no separante c en F. La preimagen de c bajo p es una superficie A con grupo isomorfo al grupo de c, asi que debe ser un anillo o una banda de moebius, pero M^2 no se retrae a su frontera, asi que A es un anillo. Sea $M' = M|_A$ y $F' = F|_c$ entonces $i_* : \pi_1(F') \to \pi_1(M')$ es un isomorfismo, y por el caso anterior $M' = F' \times I$ y podemos volver a pegar M' por A para recobrar $M = F \times I$. •

Teorema. Si M es una 3-variedad compacta irreducible y $\pi_1(M)$ es isomorfo al grupo de una superficie cerrada F distinta de S^2 y P^2, entonces M es un haz de intervalos sobre una superficie.

Demostración. Podemos suponer que G no esta contenido en un subgrupo mas grande que isomorfo al grupo de una superficie, o podriamos reemplazar a G por ese subgrupo. Sea $\bar{M}$ la cubierta de M correspondiente a G. Como G es de indice finito la cubierta es finita y por lo tanto $\bar{M}$ es compacta.

Como $\pi_1(M)$ es infinito y M es irreducible, M es un espacio $k(\pi_1(M), 1)$. $H_3(\pi_1(\bar{M}) \simeq H_3(F) = 0$ por lo tanto $\bar{M}$ tiene frontera no vacía. Si S es una componente de ∂M entonces S es incompresible (de otro modo $\pi_1(M)$, que es el grupo de una superficie cerrada, seria el producto libre de dos grupos). $\pi_1(S)$ es un subgrupo de $\pi_1(F)$, y debes ser de indice finito porque los subgrupos de indice infinito del grupo de una superficie son libres. Como la cubierta $\bar{M}$ de M correspondiente al subgrupo $\pi_1(S)$ es finita, $\bar{M}$ es compacta. Ademas $\pi_2(\bar{M}) \simeq \pi_2(M) = 0$ asi que $\bar{M}$ es irreducible, entonces por el lema anterior $\bar{M}$ es homeomorfa al producto $S \times [0, 1]$. Una de las fronteras, digamos $S \times 0$, se proyecta a S con grado 1. Si la otra frontera $S \times 1$, no se proyecta a S, el grado de la cubierta es 1 y $M \simeq S \times [0, 1]$. Si $S \times 1$ se proyecta a S, debe hacerlo con grado 1 (porque $H_1(S \times 0)$ y $H_1(S \times 1)$ son isomorfos, asi que deben ir a grupos isomorfos, pero $H_1(S)$ no puede ser isomorfo a $H_1(\tilde{S})$ si $\tilde{S}$ es una cubierta propia de S). Entonces la cubierta $p : \bar{M} \to M$ es de grado 2, y p envía cada componente de $\partial \bar{M}$ a ∂M por un homeomorfismo. Falta ver que la transformación cubriente $\phi : \bar{M} \to \bar{M}$ preserva la estructura de haz de $\bar{M}$ para saber que M es un haz. •

Problemas

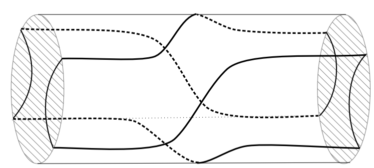
1. Sólo existe una 3-variedad irreducible M con $\partial M \neq \emptyset$ y $0 < |\pi_1(M)| < \infty$.

2. ¿Existe una 3-variedad cerrada con grupo fundamental $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}_2$? ¿$\mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$?

3. Demuestra que no existen 3-variedades cuyos grupos fundamentales contengan a $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

4. Muestra que $\pi_2(P^2 \times S^1) \neq 0$, pero que $P^2 \times S^1$ no tiene esferas encajadas esenciales.

5. Muestra que el espacio lente $L(4, 1)$ contiene una botella de Klein (esta es una superficie incompresible de un lado cuyo grupo no se inyecta en el grupo de la variedad). Hint: encuentra una superficie en el toro sólido que se obtiene pegando las tapas de este cilindro cuyo borde sea vea asi:



6. Si M es una 3-variedad prima. ¿Es cierto que las variedades cubiertas por M son primas? ¿ Y que todas las variedades que cubren a M son primas?