Variedades de Seifert

Hay muchas variedades tridimensionales que pueden descomponerse como unión de círculos, como los productos $F \times S^1$.

Un **haz de circulos** es una variedad M formada por círculos que localmente se ve como un producto $D^2 \times S^1$. El espacio cociente que se obtiene de M al colapsar cada círculo a un punto es una superficie F, y decimos que M es un haz sobre F. El haz es **trivial** si es homeomorfo a un producto $F \times S^1$

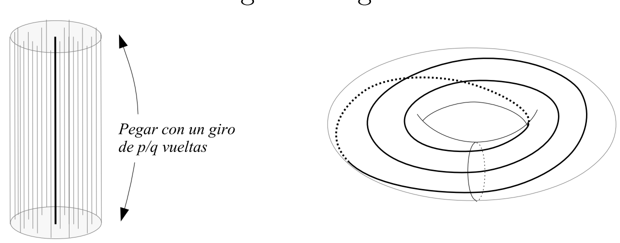
Ejemplo. El haz tangente unitario de una superficie (formado por todos los vectores tangentes de norma 1) es un haz que no es trivial, a menos que la superficie sea un toro (tarea).

Lema. Cada superficie compacta con frontera admite un número finito de haces de circulos. Cada superficie cerrada admite una infinidad de haces de circulos.

Demostración. Todos los haces de círculos sobre un disco son triviales. Si F es una superficie compacta con frontera, entonces F puede cortarse por una colección finita de arcos $a_1, a_2, ..., a_n$ para obtener un disco D, asi que un haz de círculos sobre F puede cortarse por una colección finita de anillos $A_1, A_2, ..., A_n$ para obtener un haz trivial $D \times S^1$. Para recuperar el haz sobre F hay que identificar pares de anillos A_i' y A_i'' en $\partial D \times S^1$ por medio de homeomorfismos $\phi_i : A_i' \to A_i''$. Hay una infinidad de homeomorfismos del anillo $[-1, 1] \times S^1$, pero todos son isotópicos (deslizando a lo largo de las fronteras del anillo) a uno de los 4 homeomorfismos de la forma $(s, t) \to (\pm s, \pm t)$, así que hay a lo mas 4^n haces de círculos sobre F.

Si F es cerrada y D es un disco en F, entonces cada haz de círculos sobre F es la unión de un haz sobre $F - D$ con un haz (trivial) sobre D, pegados por un homeomorfismo del toro $\partial(F - D) = \partial D$ que manda longitudes en longitudes, y hay una infinidad de homeomorfismos no isotópicos del toro que hacen esto (pero esto no prueba que los haces sean distintos.

Una **fibracion de Seifert** es una descomposición de una 3-variedad en círculos, de modo que cada círculo tiene una vecindad que es un toro sólido fibrado por círculos obtenido de $D^2 \times [0, 1]$ identificando las tapas por una rotacion de $2\pi p/q$ radianes, donde $p/q \in \mathbb{Q}$. Los círculos son las imagenes de uno o varios intervalos $z \times [0, 1]$ que se pegan al hacer la identificación, como se ve como en la siguiente figura:

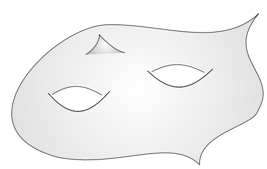


Una **variedad de Seifert** es una variedad que admite una fibracion de Seifert. Cada fibra de una fibración de Seifert tiene una multiplicidad bien definida, que es el número de veces que un disco transversal a la fibra toca a las fibras vecinas. Las fibras de multipilicidad 1 se llaman **regulares** y las otras se llaman **excepcionales**. En la fibracion del toro sólido obtenido identificando las tapas de $D^2 \times [0, 1]$ con una rotación de p/q vueltas, el círculo central tiene multiplicidad q y las otras fibras tienen multiplicidad 1.

Observaciones.

- Las fibras excepcionales son aisladas y estan en el interior de M (ya que cada fibra tiene una vecindad que es un toro solido sin mas fibras excepcionales).
- Si no hay fibras excepcionales la variedad es un haz de círculos.
- La frontera de una varidad de Seifert consta de toros y/o botellas de Klein.

El espacio de orbitas de una variedad de Seifert, obtenido al identificar a cada círculo a un punto, es una superficie S, llamada la **base** de la fibración. Geométricamente, S tiene puntos singulares correspondientes a las fibras excepcionales, que se ven como conos con ángulo $2\pi/q$ si la fibra tiene multiplicidad q.



Ejemplos de variedades de Seifert .

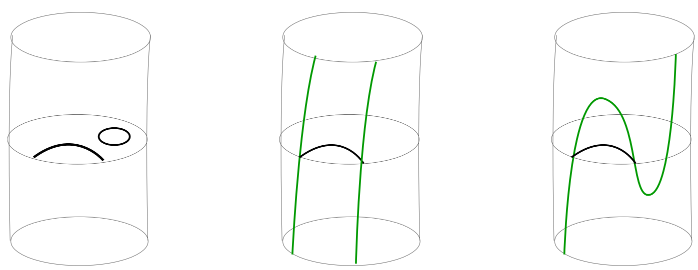
- S^3 es la unión de dos toros sólidos V y V', pegados de modo que la longitud de unos se identifica con el meridiano del otro. Podemos fibrar a los toros sólidos con fibras que dan una vuelta al meridiano y una vuelta a la longitud, de modo que las fibras coincidan en $\partial V = \partial V'$, obtenemos una fibración de S^3 con base una esfera y sin fibras excepcionales. Esta es la *fibración de Hopf* de S^3.
- Los espacios lente $L(p, q)$ tienen fibraciones con base una esfera y 2 fibras excepcionales. En $L(p, q)$ es la unión de dos toros sólidos V y V'. Cualquier descomposición de ∂V en círculos que no sean meridianos de V se extiende a una fibración de Seifert de V, y cualquier descomposición de $\partial V'$ en círculos que no sean meridianos se extiende a una fibración de Seifert de V'. Asi que cualquier descomposición de $\partial V = \partial V'$ en círculos que no sean meridianos de ninguno de los dos toros sólidos, se extiende a una fibración de Seifert de $L(p, q)$.

Superficies en variedades de Seifert.

Una superficie F propiamente encajada en una 3-variedad M es **paralela a la frontera** si F es isotópica, fijando ∂F, a una superficie contenida en ∂M. Una superficie encajada en M es **esencial** si es incompresible y no es paralela a la frontera.

Lema. En un toro sólido las únicas superficies esenciales son los discos meridianales.

Demostración. Sea F una superfice esencial en $D^2 \times S^1$. Si F no intersecta a un disco meridianal, digamos $D^2 \times 0$ entonces F esta contenida en la bola $D^2 \times [0,1]$, asi que F solo puede ser un disco, y ∂F debe separar a los discos $D^2 \times 0$ y $D^2 \times 1$, ya que de otro modo sería paralelo a la frontera. Asi que F es paralelo a $D^2 \times 0$ y F es un disco meridional. Si F intersecta a $D^2 \times 0$, podemos suponer que la intersección es transversal y consiste de curvas y arcos simples y ajenos. Si c es una curva de intersección que esta mas adentro en $D^2 \times 0$, entonces c bordea un disco D' en $D^2 \times 0$ asi que debe bordear un disco D'' en F, ya que F es incompresible. La unión de $D' \cup D''$ es una esfera encajada en $D^2 \times S^1$, que es irreducible, asi que $D' \cup D''$ bordea una bola y hay una isotopía que lleva D'' a D, por lo que podemos empujar a F para que la curva c desaparezca de la intersección. Así podemos suponer que F intersecta a $D^2 \times 0$ solamente en arcos. Si a es un arco de intersección de mas afuera en $D^2 \times 0$, hay un disco D' en $D^2 \times 0$ cuyo borde es el arco a y un arco a' en $\partial D^2 \times 0$.



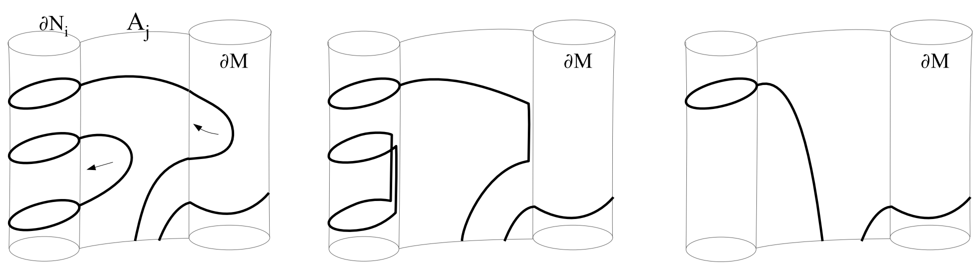
El arco a conecta a una o dos curvas en la frontera de $D^2 \times S^1$. Si son dos curvas, deben ser paralelas, y si es una, debe regresarse como en la figura, ya que las orientaciones inducidas en los extremos de a son opuestas. Si son dos curvas y cortamos a F por D' obtenemos una superficie incompresible F' cuya frontera incluye a una curva trivial en $\partial D^2 \times S^1$, de modo que F' debe ser un disco. Como F se obtiene pegando dos arcos de la frontera de F', F debe ser un anillo. Si es una sola curva...

Si M es una variedad de Seifert y S es una superficie en M, decimos que S es **horizontal** si cruza transversalmente a las fibras (es decir, si no es tangente a ninguna) y que S es **vertical** si es una unión de fibras.

Las superficies verticales están fibradas por círculos y por lo tanto son toros, botellas de Klein, anillos o bandas de Moebius. Las superficies horizontales son cubiertas ramificadas de la superficie de órbitas de M (las ramificaciones están en los puntos donde S cruza a las fibras excepcionales). Si cortamos a M por una superficie horizontal S, obtenemos una variedad H fibrada por intervalos (ya que H se ve localmente como un toro solido cortado por discos meridionales). Si S tiene 2 lados entonces H tiene dos fronteras horizontales que son copias de S, y si S tiene un solo lado entonces H tiene una sola frontera horizontal, que es una cubierta doble de S. En el primer caso H debe ser un producto $S \times [0,1]$ o dos haces de intervalos sobre una superficie S' que es cubierta dos veces por S. En el segundo caso H debe ser un haz de intervalos no trivial sobre S. M se obtiene de estos haces de intervalos identificando las fronteras horizontales por medio de homeomorfismos.

Teorema. En una variedad de Seifert todas las superficies esenciales son isotópicas a superficies horizontales (transversales a las fibras) o verticales (uniones de fibras).

Demostración. Si M es una variedad de Seifert y S es una superficie esencial en M, podemos suponer, haciendo una isotopía, que S es transversal a las fibras excepcionales $c_1, c_2, ..., c_k$. Si $N(c_i)$ una vecindad fibrada de c_i entonces $M' = M - \cup N(c_i)$ es un haz de círculos, y existe una colección de anillos $A_1, A_2, ..., A_n$ tales que $M|_{\cup A_i}$ es un haz trivial $D^2 \times S^1$. Entonces $S' = S \cap M'$ es una superficie en M' que intersecta a $\partial M'$ en meridianos de $N(c_i)$ y curvas en ∂M y S' intersecta a cada anillo A_i en curvas y arcos simples. Las curvas que son triviales en un anillo también son triviales en S' y pueden ser removidas por isotopías de S'. Si hay arcos con ambos extremos en la misma frontera de un anillo, podemos empujar a S para quitar el arco, como en la siguiente figura, reduciendo o manteniendo el número de curvas de $\partial S'$.



Las fronteras de los A_i cortan a los toros $\partial N(c_i)$ y a los toros que forman ∂M en anillos, y también podemos hacer isotopías para que S intersecte a estos anillos en curvas paralelas a las fronteras de los anillos o en arcos que van de una frontera a otra. Así podemos suponer que S' intersecta a cada toro de $\partial M'$ y a cada anillo A_i en curvas de la fibración, o que cruza a cada toro y cada anillo en arcos transversales a las fibras. Si ahora cortamos a M' y a S' por los anillos A_i, obtenemos una superficie incompresible S'' en $D^2 \times S^1$ cuya frontera es vertical u horizontal . En el primer caso S'' debe ser una colección de anillos verticales, y podemos recuperar a S pegando los anillos por sus bordes, por lo que S es un toro vertical que no toca a las fibras excepcionales. En el segundo caso S'' debe ser una colección de discos meridionales transversales a las fibras, podemos recuperar a S' identificando arcos de las fronteras de estos discos y S se obtiene pegándole a S' discos meridionales de los toros sólidos $N(c_i)$. •

Lema. Las variedades de Seifert son irreducibles, con excepción de $S^2 \times S^1$, $S^2 \tilde{\times} S^1$ y $P^3 + P^3$.

Demostración Si una variedad de Seifert M contiene una esfera esencial S, entonces los mismos argumentos del teorema anterior muestran que S es isotópica a una esfera horizontal. Si cortamos a M por la esfera obtenemos un haz de intervalos H cuya frontera consta dos esferas, así que si S no es separante H debe ser $S^2 \times [0,1]$ y si S es separante entonces H deben ser dos haces de intervalos no triviales sobre P^2. Como M se obtiene de estos haces pegando la(s) tapa(s) por un homeomorfismo, en el primer caso M debe ser $S^2 \times S^1$ o $S^2 \widetilde{\times} S^1$, y en el segundo caso M es $P^3 + P^3$ (tarea). •

Lema. Las superficies horizontales en una variedad de Seifert son esenciales.

Demostración. Si cortamos a una variedad de Seifert M por una superficie horizontal S obtenemos un haz de intervalos sobre una superficie. Si S fuera compresible entonces existiría un disco de compresión para S en M, que sería un disco de compresión para la frontera del haz de intervalos. Pero los haces de intervalos sobre superficies tienen fronteras incompresibles, ya que la proyección de la frontera a la superficie central del haz es un homeomorfismo o una cubierta doble. •

Lema. Si A es un anillo esencial en una variedad de Seifert orientable M, entonces A es vertical, a menos que M sea un haz de círculos sobre un anillo o una banda de Moebius, que tienen varias fibraciones de Seifert, en una de las cuales A es vertical.

Demostración. Si A no es isotópico a una superficie vertical entonces A debe ser isotópico a una superficie horizontal. Si cortamos a M por A obtenemos un haz de intervalos H cuya frontera horizontal consta de dos anillos si A separa a M o un solo anillo si A no la separa. Así que (como M es orientable) H es un producto $A \times I$ o uno o dos haces de intervalos no triviales sobre la banda de Moebius. $A \times I$ es un toro sólido que puede fibrarse por círculos paralelos a los de A, que al pegar por A da una fibración de M donde A es vertical. El haz de intervalos no trivial sobre la banda de Moebius tambien es un toro sólido, que puede fibrarse con círculos paralelos a los de su frontera horizontal que es A, y al pegar por A se obtiene una fibración de Seifert de M donde A es vertical. •

Lema. Las fibraciones de una variedad de Seifert orientable con frontera no vacía son únicas salvo isotopía, a menos que la variedad sea un toro sólido, o un haz de círculos sobre un anillo o una banda de Moebius.

Demostración. Si $\partial M \neq \emptyset$, entonces M es un toro sólido o contiene anillos esenciales que unen a cada par de componentes de ∂M, o bien a la única componente de ∂M consigo misma. Por el lema anterior, si M no es un haz de círculos sobre un anillo o una banda, entonces en cualquier fibración de Seifert de M, cada uno de estos anillos debe isotópico a un anillo vertical y las fronteras del anillo son fibras. De modo que en cada toro de la frontera de M las fibras de las dos fibraciones (que son paralelas a la frontera del anillo) son isotópicas. •

Ojo. Hay variedades de Seifert cerradas con fibraciones no isotópicas, por ejemplo $S^1 \times S^1 \times S^1$ y muchos espacios lente.

La descomposición JSJ.

Una 3-variedad M es **atoroidal** si no contiene toros esenciales (es decir, si todos los toros son compresibles o paralelos a la frontera).

Lema. Si M es una 3-variedad compacta irreducible, entonces existe una colección finita de toros $T_1, T_2, ..., T_n$ tales que $M|_{\cup T_i}$ es atoroidal.

Demostración. Si M contiene un toro esencial T_1 podemos cortar por ahi para obtener una variedad M_1, si M_1 tiene un toro esencial podemos cortarla por ahi para obtener una variedad M_2, etc. Este proceso debe terminar porque si no M tendría una cantidad no acotada de toros incompresibles no paralelos. •

Ejemplos.

- Si k es un nudo en S^3 entonces el exterior de k es atoroidal, a menos que k sea la suma de dos nudos no triviales o que k sea un satélite de otro nudo, como en la figura (tarea).
- Los espacios de Seifert cuyas superficies de órbitas son discos con 1 o 2 fibras excepcionales, o esferas con a lo mas 3 fibras excepcionales, son atoroidales.

Lema. Sea M una 3 variedad compacta, orientable, irreducible y atoroidal. Si M contiene un anillo esencial cuya frontera está contenida en uno o dos toros de ∂M, entonces M es una variedad de Seifert.

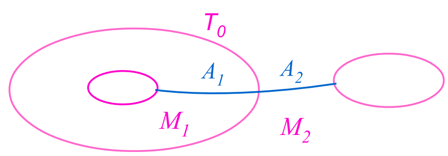
Demostración. Sea A un anillo esencial propiamente encajado en M. Si las fronteras de A están contenidas en dos toros distintos T_1 y T_2, entonces ∂A corta a cada uno en un anillo. Podemos pegar estos dos anillos con dos copias de A para obtener un toro encajado T en M. Por construcción T separa a M en dos subvariedades, y una de ellas es $T_1 \times [0, 1] \cup T_2 \times [0, 1] \cup A \times [-1, 1]$. Como M es atoroidal, T debe ser compresible o paralelo a la frontera de M, así que la otras subvariedad debe ser un toro sólido o un producto $T \times [0, 1]$. Las dos subvariedades son fibrados de Seifert, donde las fronteras de A son fibras, de modo que su unión, que es toda M, es un fibrado de Seifert.

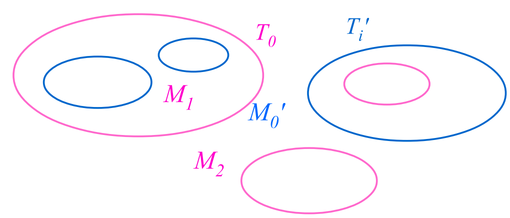
Si las dos fronteras de A están contenidas en un toro T_1, entonces ∂A corta a T_1 en dos anillos. Podemos pegar a A con uno de estos anillos para obtener un toro T, pegándolo con el otro obtenemos otro toro T', y podemos mover un poco a T y T' para que sean ajenos, de modo que el espacio entre T y T' es un producto $T_1 \times [0, 1] \cup A \times [-1, 1]$. Como M es atoroidal e irreducible, cada toro debe bordear un toro sólido o ser paralelo a la frontera, de modo que el resto de la variedad son 2 toros sólidos, o dos productos $T_i \times [0, 1]$ o un toro sólido y un producto $T_i \times [0, 1]$. En los 3 casos M es la unión de 3 espacios fibrados, donde las fronteras de A son fibras comunes, así que M es un fibrado de Seifert. •

Teorema (Descomposición JSJ). Si M es una 3-variedad compacta, orientable e irreducible, entonces existe una colección T de toros incompresibles ajenos tal que cada componente de $M|_T$ es atoroidal o una variedad de Seifert. Las colecciones mínimas de toros con estas propiedades son únicas salvo isotopía.

Demostración Por inducción sobre el número de toros en una descomposición. Sean $T_1, T_2, ..., T_k$ y $T'_1, T_2, .., T_l$ dos colecciones de toros que cortan a M en pedazos $M_1, M_2, ...$ y $M'_1, M'_2, ...$ que son variedades atoroidales o de Seifert, y que son mínimas en el sentido de que ninguna subcolección propia de los T_i o de los T'_j tiene esa propiedad. Haciendo isotopías podemos asumir que los T_i intersectan a los T'_j transversalmente en curvas simples y ajenas. Supongamos ademas que hemos hecho isotopías para que el número de curvas de intersección sea el mínimo posible. Entonces las curvas de intersección entre dos toros tienen que ser esenciales en ambos: si no lo fueran, una curva bordearía un disco en un toro, y como el otro toro es incompresible también bordearía un disco ahi. La unión de los dos discos sería una esfera en M, que es irreducible, así que habría una isotopía que intercambia los discos, reduciendo el número de curvas de intersección entre los toros. Así que podemos suponer que las curvas de intersección entre los toros son esenciales en cada toro y por lo tanto son paralelas y cortan a cada toro en anillos.

Sea c una curva de intersección entre un toro T_i y un toro T'_j. Sean M_1 y M_2 los pedazos de M adyacentes a T_i (es posible que $M_1 = M_2$) y sean A_1 y A_2 los anillos de T'_j en M_1 y M_2 adyacentes a c (es posible que $A_1 = A_2$). Estos anillos no son paralelos a T_i (ya que de otro modo podríamos hacer una isotopía que reduzca las intersecciones de T_i con T'_j) entonces por los dos lemas anteriores M_1 y M_2 son variedades de Seifert y podemos suponer que los anillos son verticales, de modo que la curva c es una fibra de ambas fibraciones de Seifert. Pero entonces al pegar a M_1 con M_2 a lo largo de T_i obtenemos una variedad de Seifert, así que no es necesario que el toro T_i esté en la colección $T_1, T_2, ..., T_k$ para cortar a M en variedades atoroidales o de Seifert.





Si ningún T_i intersecta a ningún T'_j, entonces cada T_i está contenido en un pedazo M'_j de la segunda descomposición de M. Si M'_j es atoroidal, T_i debe ser paralelo a algún T'_j, y podemos hacer una isotopía para que $T_i = T'_j$ y cortar por ahi a M y aplicar inducción. Podemos suponer entonces que cada T_i está contenido en un M'_j que es de Seifert y que cada T'_j está contenido en un M_i que es de Seifert. Haciendo isotopías podemos suponer que los T_i son verticales en los M'_j y que los T'_j son verticales en los M_i. Fijemos un toro T_0 de la primera descomposición de M y sean M_1 y M_2 los pedazos de esa descomposición adyacentes a T_0, y sea M'_0 el pedazo de la segunda descomposición que contiene a T_0. Entonces M_1 está contenida en M'_0 o M_1 contiene a algunos T'_j, y M_2 está contenida en M'_0 o M_2 contiene a algunos T'_j. En ambos casos M_1 y M_2 deben ser variedades de Seifert y $N_1 = M_1 \cap M'_0$ y $N_2 = M_2 \cap M'_0$ también deben serlo.

Si N_1 y N_2 no son haces de círculos sobre un anillo o sobre una banda de Moebius, entonces las fibraciones de Seifert de N_1 y N_2 son únicas salvo isotopía, así que las fibras de M_1 coinciden con las de N_1 y estas coinciden con las de M'_0. Y las fibras de M_2 coinciden con las de N_2 y estas coinciden con las de M'_0. Así que las fibras de M_1 y las de M_2 coinciden en T_1, por lo tanto las fibraciones de M_1 y M_2 se unen para dar una fibración de $M_1 \cup M_2$. y esto dice que no era necesario usar a T_1 para descomponer a M en pedazos atoroidales o de Seifert.

Falta ver que sucede si N_1 o N_2 es un haz de círculos sobre el anillo o la banda de Moebius. Si N_1 es un haz de círculos sobre un anillo, entonces (como M es orientable) N_1 es un producto $T_0 \times [0,1]$ y cualquier fibración de T_0 se extiende a una fibración de N_1. El otro toro de ∂N_1 no puede ser un T'_j porque este seria paralelo a T_0, así que debe ser un T_i. Por lo tanto $N_1 = M_1$ y podemos extender la fibración de M_2 a M_1 para obtener una fibración de $M_1 \cup M_2$. Así que no era necesario cortar por T_1 para descomponer a M. Si N_1 es un haz de círculos sobre la banda de Moebius, entonces ∂N_1 es un solo toro y $M_1 = N_1 \subset M'_0$, así que podemos cambiar el fibrado de M_1 por el de M'_0. Lo mismo sucede si N_2 es un haz de círculos sobre un anillo o la banda de Moebius. En los dos casos, las fibraciones de M_1 y M_2 pueden hacerse coincidir con la de M'_0, de modo que al pegar M_1 y M_2 por T_0 obtenemos una fibración de Seifert para $M_1 \cup M_2$. •

El teorema anterior dice que cada 3-variedad irreducible M contiene una variedad de Seifert (posiblemente disconexa o vacía) cuyo complemento es atoroidal. La variedad de Seifert mas grande con esta propiedad es única, y se llama la **subvariedad característica** de M. Esta es la descomposición de Jaco, Shalen y Johanson de M, y es el punto de partida para la descomposición de las 3-variedades en piezas geométricas.

Problemas

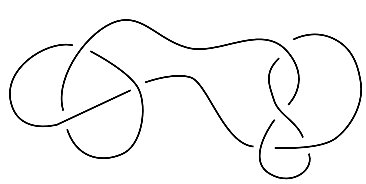
1. Demuestra que si el haz tangente unitario sobre una superficie cerrada F es homeomorfo a $F \times S^1$, entonces F es un toro. Hint: Si el haz tangente de F se trivial entonces F se puede peinar.

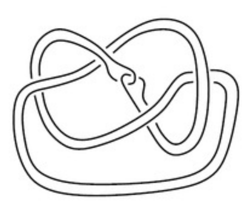
2. Muestra que el haz tangente unitario de S^2 es la unión de dos toros sólidos. y di como se pegan.

3. Muestra que $P^3 + P^3$ es una variedad de Seifert, y es la única variedad de Seifert que no es prima.

4. Muestra que el exterior de un nudo k es atoroidal, a menos de k sea un nudo compuesto o un nudo satélite.

5. ¿Como se ven las descomposiciones JSJ de los exteriores de estos nudos?





6. En una variedad de Seifert orientable M, las fibras regulares representan un elemento central de $\pi_1(M)$.