Variedades de Haken

Si S es una superficie compacta con frontera, entonces podemos ir cortando a S a lo largo de arcos simples ajenos hasta obtener un disco: Si S no es un disco, entonces S contiene un arco no separante a_1, si cortamos a S por a_1 obtenemos una superficie S_1 cuya característica de Euler es 1 mas que la de S. Si S_1 no es un disco, entonces contiene un arco no separante a_2, y si cortamos a S_1 por a_2 obtenemos una superficie S_2 cuya característica de Euler es 1 mas que la de S_1, etc. El proceso no puede continuar indefinidamente porque la característica de Euler va creciendo y cuando llega a 1 la superficie debe ser un disco. Si S es una superficie cerrada que no es una esfera, entonces contiene una curva simple c que no bordea un disco, cortando a S por c obtenemos una o dos superficies que podemos cortar a lo largo de arcos hasta obtener discos.

Es natural tratar de hacer algo análogo con las 3-variedades.

Si M es una 3-variedad compacta, una **jerarquia** para M es una secuencia de subvariedades $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = \cup B^3$ donde M_{i+1} se obtiene cortando M_i por una superficie de dos lados propiamente encajada e incompresible F_i.

Ejemplo. Podemos dar una jerarquia para $S^1 \times S^1 \times S^1$ cortando por el toro $S^1 \times S^1 \times 0$ para obtener $S^1 \times S^1 \times [0,1]$, luego cortando por el anillo $S^1 \times 0 \times [0,1]$ para obtener $S^1 \times [0,1] \times [0,1]$ y finalmente cortando por el disco $0 \times [0,1] \times [0,1]$ para ontener una bola $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Lema Si M es una 3-variedad compacta irreducible, entonces existe un entero k tal que cualquier colección de mas de k superficies cerradas incompresibles en M contiene 2 superficies paralelas.

Demostración. Es similar a la demostracion de Knesser de la existencia de factorizaciones primas: hay que ver que las superficies incompresibles son isotopicas a superficies normales, las regiones entre estas superfices estan armadas de los pedazos de tetraedros cortados por triangulos y cuadrados. En cada tetraedro hay a lo mas 6 pedazos que no son productos, y todos las regiones formadas por productos son haces de intervalos. Un haz de intervalos trivial es un producto $superficie \times I$, lo que implica que dos superficies son paralelas, y un haz de intervalos no trivial se refleja como un sumando $\mathbb{Z}_2$ de $H_1(M, \mathbb{Z}_2)$.

Lema Si F es una superficie cerrada entonces todas las superfices incompresibles no separantes en $F \times I$ son anillos $c \times I$ para una curva c en F.

Demostración. Tarea.

Teorema Si M es una 3-variedad compacta, orientable e irreducible con $\partial M \neq \emptyset$ entonces M tiene una jerarquia $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_n = B^3$ donde cada M_i es conexa y la superficie F_i donde cortamos M_i para obtener M_{i+1} tiene frontera no vacía.

Demostración. Primero construyamos una secuencia $M = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \ldots$ de subvariedades no necesariamente conexas, donde N_{i+1} se obtiene cortando a N_i por una superficie incompresible S_i, del siguiente modo: si una componente de ∂N_i es compresible, sea S_i un disco de compresión. Si todas las componentes de ∂N_i son incompresibles, sea S_i una superficie incompresible no separante en N_i. Podemos suponer que S_i no toca a las S_j's anteriores que son discos de compresión, porque si toca a alguno podemos deslizar a S_i para que no lo haga.

Veamos que este proceso no puede continuar indefinidamente (y por lo tanto debe terminar en una colección de bolas).

Si no terminara, existiría una secuencia infinita de subvariedades $N_{i_1}, N_{i_2}, N_{i_3}, \ldots$ Como las compresiones simplifican la frontera de las N_{i_j}, podemos suponer que cada ∂N_{i_j} incompresible y como solo un número finito de las S_i pueden ser cerradas (porque en M solo caben una cantidad finita de superficies incompresibles cerradas no paralelas) podemos suponer que S_{i_j} tienen frontera no vacía. Sea R_{i_j} una componente de ∂N_{i_j} que toca a S_{i_j}. Empujándolas un poco hacia el interior de N_{i_j} podemos suponer que las R_{i_j} son ajenas. Pero en M solo caben una cantidad finita de superficies incompresibles cerradas no paralelas y ningun par de superficies R_{i_j} y R_{i_k}, $j < k$ pueden serlo porque R_{i_k} está en N_{i_j} cortada por S_{i_j}, y R_{i_j} toca a S_{i_j}. La contradicción muestra que el proceso termina con algún $M_n = \cup B^3$. Observar que si N_{i+1} tiene mas componentes conexas que N_i es porque cortamos por un disco de compresión separante (los otros cortes son por superficies no separantes). Pero podemos omitir estos cortes: Si S_i fue el ultimo corte, entonces (por construcción) los S_j subsecuentes no tocan a S_i, asi que las dos copias cortadas de S_i están en ∂M_n, de hecho están en diferentes componentes de M_n, por lo tanto al omitir el corte solo estamos reduciendo el número de bolas que quedan en M_n. Podemos repetir el argumento para ver que si omitimos todos los discos de compresion separantes terminamos con $M_n = B^3$. •

Corolario Si M es una 3-variedad cerrada, orientable e irreducible y M contiene una superficie de dos lados incompresible entonces M tiene una jerarquia.

Las 3-variedades compactas que admiten una jerarquia se llaman **variedades de Haken**.

Ejemplos.

- Los exteriores de nudos son variedades de Haken.
- Las variedades que se obtienen pegando dos exteriores de nudos no triviales por medio de cualquier homeomorfismo de sus fronteras son variedades de Haken.
- Todas las variedades de Seifert cuya base no es una esfera con ≤ 3 fibras excepcionales o un plano proyectivo con ≤ 2 fibras excepcionales son variedades de Haken.

El teorema de Waldhausen

Existen muchos ejemplos de superficies compactas que son homotópicamente equivalentes pero no son homeomorfas (por ejemplo, todas las superficies con frontera no vacia y con la misma caracteristica de Euler) pero dos superficies cerradas homotopicamente equivalentes deben ser homeomorfas.

En 3 dimensiones existen variedades con borde (por ejemplo, haces de intervalos) y tambien variedades cerradas (por ejemplo, espacios lente) que son homotópicamente equivalentes y no son homeomorfas. Pero es fácil ver que una 3-variedad con borde no puede ser homotópicamente equivalente a una 3-variedad cerrada (tarea).

En los años 60's, Walhausen demostró su teorema de rigidez topológica para 3 variedades, que muestra que si dos 3-variedades cerradas, orientables e irreducible son homotópicamente equivalentes y una de ellas es de Haken, entonces deben ser homeomorfas. La demostración comienza en una dimensión menor, con el siguiente resultado para superficies:

Teorema. Sean S y S' dos superficies compactas, orientables, $S, S' \neq S^2$. Si $f : S \to S'$ es una función continua que induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales y es un homeomorfismo entra las fronteras, entonces f es homotópica a un homeomorfismo.

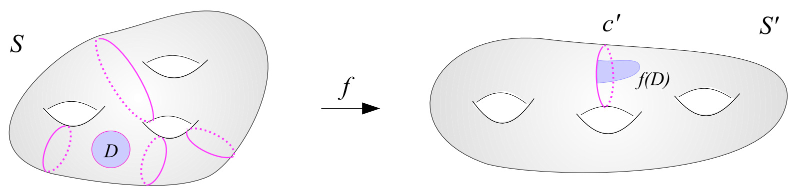
Demostración. Supongamos primero que $\partial S' \neq \emptyset$. S' puede cortarse por arcos simples hasta obtener un disco. Probaremos el resultado por inducción sobre el número n de arcos necesarios. Si $n = 0$ entonces S' es un disco. Como $\partial S \to \partial S'$ es un homeomorfismo, ∂S es uns sola curva, que debe ser homotopicamente trivial porque f induce un isomorfismo de los grupos fundamentales, así que S es un disco. Pero por el teorema de Alexander cada homeomorfismo de la frontera de un disco a la frontera de otro disco se extiende a un homeomorfismo entre los discos, y dos funciones contiuas del disco en el disco que coinciden en la frontera son homotópicas. Esto da la base de la inducción.

Ahora supogamos que el resultado es cierto para superficies que requieren menos de n cortes para convertirse en discos. Sea S' una superfice que requiere n cortes y sea $f : S \to S'$ una equivalencia homotópica. Podemos suponer que f es lineal por pedazos, y que los valores singulares de f son puntos aislados de S'.

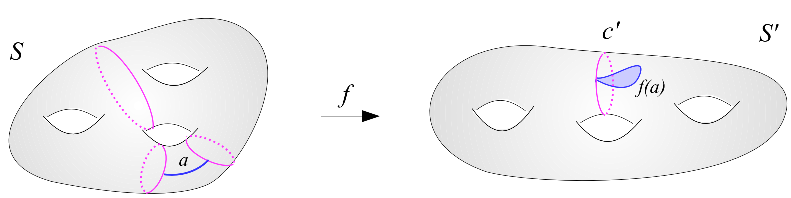
Sea a' un arco de corte para S', elegido de modo que no contenga valores singulares de f. Entonces $f^{-1}(a)$ es una colección de arcos y curvas simples y ajenos. Las imagenes de esas curvas bajo f son homotópicamente triviales en S' (ya que es'ta contenidas en un arco) asi que las curvas deben ser homotópicamente triviales en S. Si tomamos una curva c en la preimagen de a' que no contenga a otras curvas en su interior, entonces bordea un disco D cuyo interior no toca a la preimagen de a'. Sea $g : D \to a$ una homotopía de $f : c \to a'$ a una función constante de c a un punto de a'. Entonces g es homotópica a f en D (ya que las dos funciones coinciden en $c = \partial D$ y podemos reemplazar a f por g dentro de D. Ahora todo D esta en la preimagen de a'. Como el arco a tiene dos lados en S', podemos empujar f en una vecindad de D para quitar la interseccion de $f(D)$ con a'. Así obtenemos una función homotópica a f que tiene una curva menos en la preimagen de a'. Repitiendo el argumento podemos suponer que f es tal que la preimagen de a' son únicamente arcos en S. Pero como f es un homeomorfismo de ∂S a $\partial S'$, que contiene sólo dos puntos de a' , entonces ∂S sólo contiene dos puntos de $f^{-1}(a')$, de modo que $f^{-1}(a')$ es un sólo arco a. Como

$f : a \to a'$ es una función continua entre dos arcos que es un homeomorfismo entre sus fronteras, entonces es homotópica a un homeomorfismo $h : a \to a'$, y podemos hacer una homotopía de f en una vecindad V de a que sea la identidad en ∂V y que en a comience en f y termine en h. Así que la función original f en homotópica a una función que es un homeomorfismo de ∂S a $\partial S'$ y tambien es un homeomorfismo de a en a'. Así que si cortamos a S por a y a S' por a', obtenemos una función $f : S|_a \to S'|_{a'}$ que es una equivalencia homotópica y es un homeomorfismo entre sus fronteras. Por la hipótesis de inducción, $f : S|_a \to S'|_{a'}$ es homotópica a un homeomorfismo de $S|_a$ a $S'|_{a'}$. Si volvemos a pegar estas superficies por a y por a' para recuperar a S y S', obtenemos un homeomorfismo de S a S' homotópico a f.

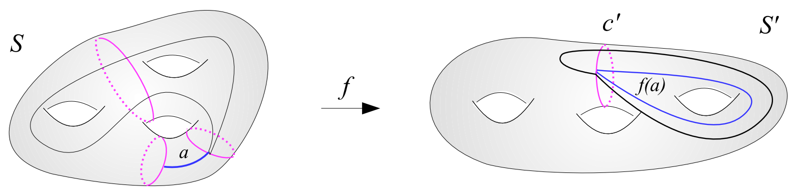
Ahora supongamos que S' es cerrada. Si $f : S \to S'$ es una equivalencia homotópica, entonces S es cerrada (ya que $H_2(S) \simeq H_2(S') \simeq \mathbb{Z}$). S' contiene una curva c' que no es separante, podemos elegirla de modo que $f^{-1}(c')$ sea una colección de curvas simples en S. Si algunas de estas curvas son homotópicamente triviales en S, entonces una de ellas, llamamosla c, bordea un disco D en S que no contiene mas curvas. La imagen de c bajo f debe ser homotópicamente trivial en S' y por lo tanto debe ser homotopica a un punto en c'. Podemos reemplazar a f en D por la homotopía que lleva a $f(c)$ a un punto, obteniendo una función homotópica a f con menos curvas triviales en la preimagen de c'. Así podemos suponer que niguna de las preimagenes de c' es 0 en homotopía.



Como f induce isomorfismos en los grupos de homología, si c es una curva en la preimagen de c' que no es homotópicamente trivial, entonces no puede ser homológicamente trivial (si lo fuera, su imagen bajo f sería homologicamente trivial en c', pero entonces ser;ia homotópicamente trivial en c' y por lo tanto en S', por lo que c tendría que ser homotópicamente trivial en S). Así que el grado de la función $f : c \to c'$ debe ser un entero distinto de 0. Si el grado es n, entonces $f_*[c] = n[c']$ y como f induce un isomorfismo en H_1, debe existir un d tal que $[c'] = f_*[d]$ y por lo tanto $[c] = n[d]$, pero las curvas simple representan elementos indivisibles de $H_1(S)$, por lo tanto $n = \pm 1$. Y como f induce un isomorfismo en H_1 y todas las curvas en la preimagen de c' van a dar a la clase $\pm[c']$ entonces todas deben ser homólogas salvo por los signos, y las suma de todas debe ir a $\pm[c']$, Si la preimagen de c' contiene mas de una curva, entonces hay un arco simple a que conecta a dos de ellas con signos opuestos, que no cruza a ninguna otra curva, y cuya imagen bajo f es un lazo l' que empieza y termina en c'. Si l' es homotópicamente trivial en S' entonces podemos usar la homotopía para dar una homotopía de f de modo que la preimagen de c' contenga al arco a, y empujando a $f(a)$ a un lado de c' podemos hacer que la preimagen de c' cambie de modo que c_1 y c_2 se conecten por dos arcos paralelos a a, convirtiéndose en una curva homológicamente trivial, que por el argumento anterior debe ser homotópicamente trivial y puede eliminarse por una homotopía de f.



Si el lazo l' no es homotópicamente trivial en S', usamos el hecho de que f induce un isomorfismo en homotopía para hayar un lazo l en S que empieza y termina en el punto final de a de modo que su imagen sea homotópica a l', y podemos reemplazar al arco a por el arco al^{-1}, cuya imagen en S' es un lazo homotópicamente trivial. El arco al^{-1} puede no ser simple y puede cruzar a otras curvas de la preimagen de c'.



•

Teorema. Si M y N son 3-variedades compactas orientables, irreducibles y con frontera no vacía, y que existe una equivalencia homotópica $f : M \to N$ tal que la restricción $f : \partial M \to \partial N$ es un homeomorfismo, entonces f es homotópica a un homeomorfismo $h : M \to N$.

Demostración Ver el libro de Hempel. •

Teorema de Waldhausen. Si M y N son 3-variedades cerradas orientables e irreducibles, con grupos fundamentales infinitos isomorfos y N es de Haken, entonces M y N son homeomorfas.

Demostración Ver el libro de Hempel. •

Problemas

1. Construye una variedad de Haken cuyos grupos de homología sean iguales a los de S^3.
2. Muestra que las variedades de Haken son primas.
3. Muestra que las cubiertas finitas de variedades de Haken son de Haken.
4. Muestra, usando jerarquias, que el grupo fundamental de una variedad de Haken es libre de torsión.
5. Encuentra ejemplos de 3-variedades con distinto número de componentes en la frontera que sean homotópicamente equivalentes.
6. Demuestra que una 3-variedad cerrada no puede ser homotopicamente equivalente a una 3-variedad con borde.